

PROBLÈME DE LA SEMAINE 2

EXERCICE 1 — (Factorielles)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n (2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1} \quad (\text{c-à-d : } 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1})$$

EXERCICE 2 — (Une équation fonctionnelle)

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\mathbb{N}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n) + f(m) \quad (\square)$$

Pour y parvenir, on se propose de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

1/ Analyse. Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition $(\square)$ énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

b/ Etablir que $f(2) = 2 \times f(1)$. Puis exprimer $f(3)$ en fonction de $f(1)$, en justifiant votre réponse.

c/ Etablir qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \lambda n$$

2/ Synthèse. A l'aide de ce qui précède, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition $(\square)$.

EXERCICE 3 — (Arithmétique “appliquée”)

1/ Soit n un entier relatif. Montrer que :

$$(n \text{ est multiple de } 3) \iff (n^2 \text{ est multiple de } 3)$$

2/ Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.