

EXERCICES 4 – NOMBRES COMPLEXES

MODULES

EXERCICE 1. — (Modules et lieux géométriques). Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que :

$$1/ |z - 1| = 2 \quad | \quad 2/ z\bar{z} = 16 \quad | \quad 3/ |iz - 2| = 9 \quad | \quad 4/ |z - i| = |z + i|$$

EXERCICE 2. — (Identité du parallélogramme). Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

EXERCICE 3. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z + 1| = |z| + 1$

EXERCICE 4. — (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Soient z et z' deux complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$[|z + z'| = |z| + |z'|] \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z]$$

EXERCICE 5. — (Inégalité triangulaire généralisée) Démontrer que : *

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

càd, moins rigoureusement mais un tout petit peu plus explicitement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

EXERCICE 6. — Soit θ un réel de $[0, \pi[$. Déterminer le module de $z = 1 + e^{i\theta}$.

EXERCICE 7. — Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Démontrer que : $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

EXERCICE 8. — Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que $\frac{z + 1}{z - 1} \in i\mathbb{R}$.

ARGUMENT, FORME TRIGONOMETRIQUE, FORME EXPONENTIELLE

EXERCICE 9. — Déterminer les formes exponentielles des complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_5 = \pi - 4$.

EXERCICE 10. — Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_1 = (1 - i)^8$, celle de $z_2 = (2 + 2i)^4$, puis celle de $z_3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{62}$.

EXERCICE 11. — Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que (exceptionnellement, une solution graphique conviendra parfaitement) :

$$\begin{array}{l|l} 1/ \arg(z) = 0 \pmod{2\pi} & 3/ \arg(z) = 0 \pmod{\pi} \\ 2/ \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} & 4/ \arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{array}$$

*. On pourra pour cela admettre que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (c'est l'inégalité triangulaire du cours).

APPLICATIONS DES FORMULES D'EULER ET DE MOIVRE

EXERCICE 12. — Linéariser $\sin^4(\theta)$; $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$; $\cos^5(\theta)$; $\sin^3(\theta) \cos^3(\theta)$.

EXERCICE 13. — Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

EXERCICE 14. — Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

EXERCICE 15. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in]0; 2\pi[$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$.

EXERCICE 16. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

EXERCICE 17. — (Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$).

1/ **Délinéarisation.** Soit θ un nombre réel. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

2/ On pose $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a , b et c , que l'on explicitera, tels que :

$$a\omega^5 + b\omega^3 + c\omega = 0$$

3/ On considère à présent l'équation (E) : $aX^5 + bX^3 + cX = 0$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). On vérifiera en particulier que (E) possède deux solutions non nulles strictement positives, et deux solutions non nulles strictement négatives.

b/ On note X_1 et X_2 les solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$. Justifier que : $X_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4/ A l'aide des questions précédentes, préciser la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 18. — (Délinéarisation de $\cos(2n\theta)$). Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^n \left[\binom{2n}{2p} (-1)^p \cos^{2(n-p)}(\theta) \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

EXERCICE 19. — (Linéarisation de $\cos^{2n}(\theta)$).

Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que : $\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{-2i(n-k)\theta}$

2/ Montrer que : $\cos^{2n}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\theta) \right)$