

EXERCICES 4 – NOMBRES COMPLEXES – CORRIGÉ

MODULES

EXERCICE 1. — (Modules et lieux géométriques). Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que :

1/ $|z - 1| = 2$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z , et A le point du plan complexe d'affixe 1. On a : $|z - 1| = 2 \iff AM = 2$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|z - 1| = 2$ est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

2/ $z\bar{z} = 16$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z . On a : $z\bar{z} = 16 \iff |z|^2 = 16 \iff |z| = 4 \iff OM = 4$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $z\bar{z} = 16$ est donc le cercle de centre O et de rayon 4.

3/ $|iz - 2| = 9$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z , et A le point du plan complexe d'affixe $(-2i)$. On a : $|iz - 2| = 9 \iff |i| \times |z + 2i| = 9 \iff AM = 9$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|iz - 2| = 9$ est donc le cercle de centre A et de rayon 9.

4/ $|z - i| = |z + i|$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z , A et B les points du plan complexe d'affixes respectives i et $(-i)$. On a : $|z - i| = |z + i| \iff AM = BM$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|z - i| = |z + i|$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et B : c'est donc la médiatrice du segment $[AB]$

EXERCICE 2. — (Identité du parallélogramme). Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

Corrigé en classe.

EXERCICE 3. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z + 1| = |z| + 1$

Soit z un complexe. Observons que : $|z + 1| = |z| + 1 \iff |z + 1|^2 = (|z| + 1)^2$ (puisque les deux termes de la première égalité sont des réels positifs).

Posons à présent : $z = a + ib$ (avec a et b réels).

On a d'une part : $|z + 1|^2 = |a + 1 + ib|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2$.

D'autre part : $(|z| + 1)^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + 1$.

On en déduit que : $|z + 1| = |z| + 1 \iff a = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cette dernière condition implique que a est positif, et que $b = 0$.

En résumé, pour un nombre complexe z , on a montré l'implication : $|z + 1| = |z| + 1 \implies z \in \mathbb{R}_+$.

L'implication réciproque est clairement vraie.

Conclusion. $(|z + 1| = |z| + 1) \iff (z \text{ est un réel positif ou nul})$

EXERCICE 4. — (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Soient z et z' deux complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$[|z + z'| = |z| + |z'|] \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z]$$

Avec les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} + 1$$

Posons $Z = \frac{|z'|}{|z|}$. On a donc :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff |Z + 1| = |Z| + 1$$

D'après l'exercice précédent, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, Z = \lambda \quad \text{d'où :} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$$

On a ainsi prouvé l'implication :

$$[|z + z'| = |z| + |z'|] \implies [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z]$$

La réciproque est une formalité.

Conclusion. $[|z + z'| = |z| + |z'|] \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z]$

EXERCICE 5. — (Inégalité triangulaire généralisée) Démontrer que : *

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

càd, moins rigoureusement mais un tout petit peu plus explicitement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, notons $P(n)$ l'assertion : " $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ ".

Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$ par récurrence sur n .

► **L'initialisation** (pour $n = 2$) est fournie par l'inégalité triangulaire du cours, rappelée dans l'énoncé. On peut donc affirmer que $P(2)$ est vraie.

► **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geq 2$. Soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ ($n+1$) nombres complexes.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}|}_{= \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|} \end{aligned}$$

la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les sommes ; la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire de l'énoncé ; la deuxième inégalité provenant de l'hypothèse de récurrence.

*. On pourra pour cela admettre que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (c'est l'inégalité triangulaire du cours).

En résumé, on a établi que[†] : $\forall (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et prouve donc l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$

NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

EXERCICE 6. — Soit θ un réel de $[0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.

Grâce à la technique de l'angle-moitié, on a : $z = 2e^{i\theta/2} \cos(\theta/2)$.

Si $\cos(\theta/2) \geq 0$, alors : $|z| = 2 \cos(\theta/2)$ et $\arg(z) = \theta/2 \pmod{2\pi}$.

Sinon, on a $\cos(\theta/2) < 0$, et on réécrit alors : $z = -2 \cos(\theta/2) e^{i(\pi+\theta/2)}$. Dans ce cas :

$$|z| = -2 \cos(\theta/2) \text{ et } \arg(z) = \pi + \theta/2 \pmod{2\pi}.$$

EXERCICE 7. — Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Démontrer que : $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. On a :

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2) \overline{z_1 z_2}}{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = z_1 \overline{z_2} + 2 + \overline{z_1} z_2$$

Finalement : $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = 2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$. D'où : $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Or z_1 et $\overline{z_2}$ sont de module 1, donc leur produit également. Ceci implique que : $|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| \leq 1$, et il s'ensuit que $2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$.

Conclusion. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2, \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+$

[†]. Les nombres complexes $z_1, \dots, z_{n+1}$ étant arbitraires dans le raisonnement précédent.

EXERCICE 8. — Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Corrigé en classe.

ARGUMENT, FORME TRIGONOMETRIQUE, FORME EXPONENTIELLE

EXERCICE 9. — Déterminer les formes exponentielles des complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = -2+2i\sqrt{3}$ et $z_5 = \pi - 4$.

La correction détaillée a été faite en classe. On a :

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/6}; \quad z_2 = \sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/3}; \quad z_3 = -2-2i = 2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4};$$

$$z_4 = -2+2i\sqrt{3} = 4e^{2i\pi/3}; \quad z_5 = \pi - 4 = (4-\pi)e^{i\pi}.$$

EXERCICE 10. — Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_1 = (1-i)^8$, celle de $z_2 = (2+2i)^4$, puis celle de $z_3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{62}$.

1/ On a : $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. D'où : $(1-i)^8 = \sqrt{2}^8 e^{-8i\pi/4} = 2^4 e^{-2i\pi}$. Finalement : $(1-i)^8 = 16$.

2/ On a : $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{5/2}e^{i\pi/4}$. D'où : $(2+2i)^4 = (2^{5/2})^4 e^{i\pi} = 2^{10}e^{-i\pi}$.

Finalement : $(2+2i)^4 = -1024$.

3/ On a : $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$. D'où : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{62} = e^{62i\pi/3} = e^{6 \times 10i\frac{\pi}{3} + 2i\frac{\pi}{3}} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Finalement : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{62} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 11. — Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que (exceptionnellement, une solution graphique conviendra parfaitement) :

1/ $\arg(z) = 0 \pmod{2\pi}$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathbb{R}_+^*$.

2/ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in i\mathbb{R}_+^*$.

3/ $\arg(z) = 0 \pmod{\pi}$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in i\mathbb{R}^*$.

4/ $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathbb{C}^*$ ayant des parties réelles et imaginaires égales.

APPLICATIONS DES FORMULES D'EULER ET DE MOIVRE

EXERCICE 12. — Linéariser $\sin^4(\theta)$; $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$; $\cos^5(\theta)$; $\sin^3(\theta) \cos^3(\theta)$.

1/ Pour tout réel θ , on a : $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Il s'ensuit que :

$$\sin^4(\theta) = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4}{(2i)^4} = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

Donc :

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{16} (2 \cos(4\theta) - 8 \cos(2\theta) + 6)$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{4}$

2/ Pour tout réel θ , on a : $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta) - \sin^4(\theta)$. Or : $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}$ (formulaire de trigo).

On conclut grâce à cette observation et au calcul précédent.

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = -\frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{4}$

3/ Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{d'où :} \quad \cos^5(\theta) = \frac{1}{32} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5$$

Il s'ensuit que :

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{32} (e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}) = \frac{1}{32} (2 \cos(5\theta) + 10 \cos(3\theta) + 20 \cos(\theta))$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^5(\theta) = \frac{1}{16} \cos(5\theta) + \frac{5}{16} \cos(3\theta) + \frac{5}{8} \cos(\theta)$.

4/ Pour tout réel θ , on a : $\sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$. On est ainsi ramenés à la linéarisation de $\sin^3$, détaillée à la fin des questions de cours de la colle 3.

EXERCICE 13. — Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\cos(4\theta) = \operatorname{Re}(e^{4i\theta}) = \operatorname{Re}\left([e^{i\theta}]^4\right)$.

Par suite : $\cos(4\theta) = \operatorname{Re}\left([\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4\right)$ (♠).

Or :

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \quad (\clubsuit)$$

D'après (♠) et (♣) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$

EXERCICE 14. — Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\sin(3\theta) = \operatorname{Im}(e^{3i\theta}) = \operatorname{Im}\left([e^{i\theta}]^3\right)$.

Par suite : $\sin(3\theta) = \operatorname{Im}\left([\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3\right)$ (♠).

Or :

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3 = \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta) \quad (\clubsuit)$$

D'après (♠) et (♣) :

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

EXERCICE 15. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in]0; 2\pi[$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$.

Pour tout réel θ , on a : $\cos^2(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}$.

Par suite :

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n 1 + \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) \right] = \frac{1}{2} \left[(n+1) + \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) \right] \quad (\star)$$

Soient k un entier naturel et θ un réel de $]0; 2\pi[$, différent de π . On a : $\cos(2k\theta) = \operatorname{Re}(e^{2ik\theta})$.

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ik\theta}) \iff \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{2ik\theta} \right)$$

En posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{2ik\theta}, \text{ on a : } \boxed{\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \operatorname{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)}$$

$$\text{Or : } S_n = \sum_{k=0}^n e^{2ik\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^n (e^{2i\theta})^k$$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{2i\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien[‡], puisque $e^{2i\theta} \neq 1$, selon l'hypothèse faite sur θ un peu plus haut.

Ainsi :

$$S_n = \frac{1 - (e^{2i\theta})^{n+1}}{1 - e^{2i\theta}} \iff S_n = \frac{1 - e^{2i(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}} \iff S_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} (e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta})}{e^{i\theta} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})} \quad (\text{technique de "l'angle-moitié"})$$

$$\iff S_n = e^{i(n\theta)} \frac{-2i \sin((n+1)\theta)}{-2i \sin(\theta)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = e^{i(n\theta)} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \cos(n\theta) \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\text{Finalement, dans ce cas : } \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2} \left[(n+1) + \cos(n\theta) \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \right]$$

[‡]. $\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

EXERCICE 16. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

Soient θ un réel, et n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left((1 + e^{i\theta})^n \right) = \operatorname{Re} \left(\left[2e^{i\theta/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(2^n e^{in\theta/2} \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

EXERCICE 17. — (Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$).

1/ **Délinéarisation.** Soit θ un nombre réel. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

2/ On pose $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a , b et c , que l'on explicitera, tels que :

$$a\omega^5 + b\omega^3 + c\omega = 0$$

3/ On considère à présent l'équation (E) : $aX^5 + bX^3 + cX = 0$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). On vérifiera en particulier que (E) possède deux solutions non nulles strictement positives, et deux solutions non nulles strictement négatives.

b/ On note X_1 et X_2 les solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$.

Justifier que : $X_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4/ A l'aide des questions précédentes, préciser la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

CORRIGÉ

1/ Soit θ un réel. On a : $\cos(5\theta) = \operatorname{Re}(e^{5i\theta}) = \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^5\right) = \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5\right)$. Or :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos^5(\theta) + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i\sin^5(\theta)$$

Donc, en extrayant la partie réelle de l'expression précédente[§] :

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + 5\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta))^2 \\ &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta) + 10\cos^5(\theta) + 5\cos(\theta) - 10\cos^3(\theta) + 5\cos^5(\theta) \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$.

2/ En donnant à θ la valeur $\pi/10$ dans la relation que l'on vient d'établir, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

En notant $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, on a donc : $16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega = 0$.

[§]. Et en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie pour écrire $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

3/ a/ Soit X un réel. On a :

$$[X \text{ est solution de (E)}] \iff [16X^5 - 20X^3 + 5X = 0] \iff [X = 0 \vee 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0]$$

Dans la seconde équation, on pose $Y = X^2$. L'équation se réécrit alors : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Cette équation du second degré à coefficients réels possède un discriminant strictement positif : $\Delta = 80$. On en déduit qu'elle possède deux solutions : $Y_{+,-} = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32}$, soit encore : $Y_{+,-} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.

Après avoir observé que ces deux solutions sont réelles positives, on peut conclure, en revenant à la variable initiale, que **l'équation** $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$ **possède exactement 4 solutions réelles** :

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

On en déduit que **l'équation (E) possède exactement 5 solutions réelles** :

$$0, \quad \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

b/ L'énoncé suggère de poser : $X_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. On a : $X_1^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$, et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6}{8}$.

Puisque $5 - \sqrt{5} < 6$ ¶, on en déduit que :

$$\underbrace{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}_{=X_1} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4/ D'après les questions 2 et 3-a, ω est une des 5 solutions de l'équation (E). Trois de ces solutions sont négatives ou nulles. Dans le même temps, on peut affirmer que $\omega > 0$, puisque : $\frac{\pi}{10} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

La valeur exacte de ω est donc X_1 ou X_2 . Pour trancher, on observe que : $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$. Donc : $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que : $\omega > \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la question 3-b, ceci implique que $\omega = X_2$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

¶. Waouh!!!

EXERCICE 18. — Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^n \left[\binom{2n}{2p} (-1)^p \cos^{2(n-p)}(\theta) \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

Soient n un entier naturel, et θ un réel. On a : $\cos(2n\theta) = \operatorname{Re}(e^{2ni\theta}) = \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n}]$ (♠).

D'après la formule du binôme de Newton : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{2n-k}(\theta)$

On peut alors judicieusement observer que i^k est un réel si et seulement si k est pair pour affirmer que :

$$\operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n}] = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{2n-k}(\theta)$$

$$\text{Par suite : } \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n}] = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} i^{2k} \sin^{2k}(\theta) \cos^{2(n-k)}(\theta)$$

$$\text{D'où : } \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n}] = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (-1)^k \cos^{2(n-k)}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k$$

Une ultime application de la formule du binôme de Newton permet de conclure avec (♠) que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n}{2k} (-1)^k \cos^{2(n-k)}(\theta) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

EXERCICE 19. — (**Linéarisation de $\cos^{2n}(\theta)$**).

Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

$$1/ \text{ Etablir que : } \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{-2i(n-k)\theta}$$

$$\text{Par symétrie des coefficients binomiaux, on a : } \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{2n-k} e^{2i(n-k)\theta}.$$

Cette observation faite, on procède au changement d'indice : $K = 2n - k$. Lorsque k varie de $(n+1)$ à $2n$, K prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n-1$. On en déduit que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{K=0}^{n-1} \binom{2n}{K} e^{2i(n-2n+K)\theta} = \sum_{K=0}^{n-1} \binom{2n}{K} e^{-2i(n-K)\theta}$$

$$\text{D'où : } \textbf{Conclusion. } \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{-2i(n-k)\theta}.$$

2/ Montrer que :
$$\cos^{2n}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\theta) \right)$$

On a :
$$\cos^{2n}(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2n} \quad (\spadesuit)$$

D'après la formule du binôme de Newton :
$$(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(2n-k)\theta} e^{-ik\theta} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} \quad (\clubsuit)$$

On décompose cette somme en “trois morceaux” :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta}$$

D'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{-2i(n-k)\theta}$$

D'où :
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (e^{2i(n-k)\theta} + e^{-2i(n-k)\theta})$$

Par conséquent :
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\theta) \quad (\heartsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on a :
$$\cos^{2n}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\theta) \right)$$