

COLLE 4 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Propriété** : soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , on a : $f'(x) = nx^{n-1}$

Soit x un réel arbitraire.

► 1er cas : $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ Soit h un réel non nul. On a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} \right) - x^n}{h} = \frac{x^n + nhx^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} \right) - x^n}{h}$$

Ainsi :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{h}. \text{ D'où : } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}$$

Pour tout entier $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} h^{k-1} = 0$. D'où : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = 0$. *

Il s'ensuit que : $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = 0$. Finalement : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}$.

Cette limite étant finie (c'est un nombre réel), on en déduit que f est dérivable en x , et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on peut conclure : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$.

► 2ème cas : $n = 1$. Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$. Alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$$

Cette limite étant finie, on en déduit que f est dérivable en x , et que $f'(x) = 1$.

Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on peut conclure : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 = 1 \times x^{1-1}$.

Conclusion. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n$.

La fonction f est dérivable en tout réel x , et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$

QUESTION DE COURS N°4 — **Grand classique.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$ (♠)

Par ailleurs : $\forall h > -1, \ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

En posant $h = 1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), le réel h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

D'où pour tout entier naturel n non nul : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ (♡). On déduit de (♠) et (♡) que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

*. Puisque h^{k-1} tend vers 0 lorsque h tend vers 0, et que $\binom{n}{k}$ et x^{n-k} ne dépendent pas de h .

QUESTION DE COURS N°2 — **Propriété** : soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a , alors (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

f et g étant dérivables en a , elles admettent un DL1 en a . Pour tout réel h (tel que $(a+h) \in I$) on a donc :
 $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$ et $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$

D'où pour tout h (tque $(a+h) \in I$) : $(fg)(a+h) = [f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)] \times [g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h)]$

$$\text{Ainsi : } (fg)(a+h) = f(a)g(a) + hf(a)g'(a) + hf(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g(a) + h^2f'(a)g'(a) + h^2f'(a)\varepsilon_2(h) + hg(a)\varepsilon_1(h) + h^2g'(a)\varepsilon_1(h) + h^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$$

$$\text{D'où : } (fg)(a+h) = (fg)(a) + h(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) + h\varepsilon_3(h) \quad (\spadesuit)$$

(en ayant posé : $\varepsilon_3(h) = f(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g'(a) + hf'(a)\varepsilon_2(h) + g(a)\varepsilon_1(h) + hg'(a)\varepsilon_1(h) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$)

Puisque qu'il est clair que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$, on en déduit que la fonction (fg) admet un DL1 en a . A ce titre, elle est dérivable en a , et on déduit de $(\spadesuit)$ que : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

QUESTION DE COURS N°3 — **Théorème** : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Càd : f est dérivable en a SSI f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .

On raisonne par double implication pour établir l'équivalence de l'énoncé.

► **Sens direct** : supposons f dérivable en a . On écrit (diaboliquement), pour tout réel h (tque $(a+h) \in I$) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + f(a+h) - f(a) - hf'(a)^\dagger$$

$$\text{D'où : } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) \text{ d'où : } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{en ayant posé : } \varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Or, f étant dérivable en a , on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. En résumé :

$$[f \text{ est dérivable en } a] \implies \left[\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \right] \quad (\heartsuit)$$

► **Réciproquement** : supposons qu'il existe un réel ℓ tel que : $f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Alors pour tout réel h non nul tel que $(a+h) \in I$, on a : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell + \varepsilon(h)$.

D'où : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$. Donc la fonction f est dérivable en a (et $f'(a) = \ell$). Ce qui assure que :

$$\left[\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \right] \implies [f \text{ est dérivable en } a] \quad (\clubsuit)$$

Conclusion. f est dérivable en a SSI il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tque :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

†. Une version sophistiquée de la "méthode du $+1 - 1$ ".

QUESTION DE COURS N°0 — **Relation fondamentale de la trigo hyperbolique.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4}$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

UNE PREUVE POUR INFO, NON-EXIGIBLE EN COLLE — **Théorème (dérivée d'une composée) :** soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Soient encore $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ deux fonctions à valeurs réelles, avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

Soient a, I, J, f et g comme indiqués dans l'énoncé du théorème.[‡]

Puisque f est dérivable en a , on a pour tout réel h “raisonnable”[§] : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

De même, g étant dérivable en $f(a)$, on a pour tout réel H “raisonnable”[¶] :

$$g(f(a) + H) = g(f(a)) + Hg'(f(a)) + H\widehat{\varepsilon}(H) \text{ avec } \lim_{H \rightarrow 0} \widehat{\varepsilon}(H) = 0. \text{ On en déduit que :}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g\left(f(a) + \underbrace{hf'(a) + h\varepsilon(h)}_{=“H”}\right) \\ &= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon(h))\widehat{\varepsilon}(H) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h[\varepsilon(h)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon(h))\widehat{\varepsilon}(H)]$$

Soit encore :

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\widetilde{\varepsilon}(h) \text{ en ayant noté : } \widetilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(h)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon(h))\widehat{\varepsilon}(H).$$

Puisqu'il est assez immédiat que $\lim_{h \rightarrow 0} \widetilde{\varepsilon}(h) = 0$, on déduit de cette écriture (et du théorème faisant l'objet de la question de cours 3) que : $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

‡. Non mais !

§. C'est-à-dire tel que $a+h$ appartienne à I , l'intervalle de définition de la fonction f .

¶. C'est-à-dire tel que $f(a)+H$ appartienne à J , l'intervalle de définition de la fonction g .

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$; puis l'équation $\operatorname{ch}(x) = -2$.

EXERCICE 2. — Linéarisation de $\operatorname{ch}^4(x)$ pour tout réel x .

EXERCICE 3. — Etablir que pour tout entier naturel n , et pour tout réel x , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

EXERCICE 4. — Prouver que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin(x) \leq x$

EXERCICE 5. — Calcul de $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

EXERCICE 6. — Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}$

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)}$

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\operatorname{sh}(h)}$

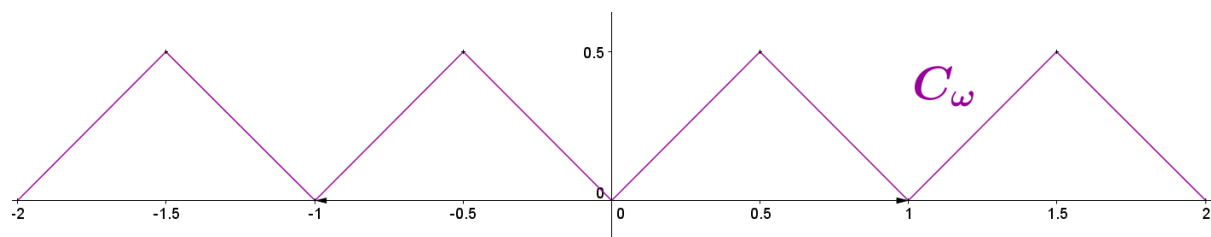
EXERCICE 8. — **A l'attention de celles et ceux qui pensent que continue implique dérivable.**

On considère les deux assertions logiques suivantes :

P : “On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille”

Q : “On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille, et caresser la courbe de ω sans se piquer”

Une seule des deux implications $P \Rightarrow Q$ ou $Q \Rightarrow P$ est vraie : laquelle ?



BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$; puis l'équation $\operatorname{ch}(x) = -2$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} = 4 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

Posons : $X = e^x$. L'équation se réécrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$. C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2$. Elle possède donc exactement deux racines réelles :

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{càd} \quad 2 \pm \sqrt{3}$$

Par suite :

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \iff e^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Après avoir observé que $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont des réels strictement positifs (ces affirmations pourront être admises), on peut conclure :

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \iff x = \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(2 - \sqrt{3})$$

L'équation $\operatorname{ch}(x) = -2$ est beaucoup plus rapide à résoudre : en effet, la fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$, et l'équation ne possède donc aucune solution réelle.

EXERCICE 2. — Linéarisation de $\operatorname{ch}^4(x)$ pour tout réel x .

Pour tout réel x on a :

$$\operatorname{ch}^4(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x}) = \frac{1}{16} (2\operatorname{ch}(4x) + 8\operatorname{ch}(2x) + 6)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{ch}(4x)}{8} + \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2} + \frac{3}{8}$

EXERCICE 3. — Etablir que pour tout entier naturel n , et pour tout réel x , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n \left(\frac{x}{2} \right)$$

Soient x un réel et n un entier naturel. Selon la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = (1 + e^x)^n = [e^{x/2} (e^{-x/2} + e^{x/2})]^n = [e^{x/2} 2\operatorname{ch}(x/2)]^n = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n \left(\frac{x}{2} \right)$$

Conclusion. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n \left(\frac{x}{2} \right)$

EXERCICE 4. — Prouver que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin(x) \leq x$

Pour tout réel x , posons $f(x) = \sin(x) - x$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x) - 1$.

La fonction $\cos$ étant majorée par 1, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}$; la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en outre $f(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) - x \leq 0$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$

EXERCICE 5. — Calcul de $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Selon le cours : $\forall h \in \mathbb{R}, \sin(h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Posons : $h = \frac{1}{n}$. On peut aisément observer que h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On déduit de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\blacktriangleright n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n + n\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{D'où : } \ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\blacktriangleright n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{D'où : } \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\blacktriangleright \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{D'où : } \ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

EXERCICE 6. — Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

Selon le cours, on a pour tout réel $h \in]-1, 1[$: $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ (♠)

Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$ (♣)

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ‖

On déduit de cette formule et de (♣) que pour tout réel $x > 0$:

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

$$\iff \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\iff \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = 0$

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\blacktriangleright \sin(h) = h + h\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \ln(1+h) = h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

On en déduit que pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\frac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} = \frac{h + h\varepsilon_1(h) + 1 - 1 - \frac{h}{2} - h\varepsilon_2(h)}{h + h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2} + h(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{h + h\varepsilon_3(h)}$$

$$\text{D'où : } \frac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} = \frac{\frac{1}{2} + (\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{1 + \varepsilon_3(h)} \quad \text{Ainsi : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} = \frac{1}{2}$$

‖. Il suffit de poser $h = \frac{1}{x}$ dans la formule (♠).

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\blacktriangleright \tan(h) = h + h\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \sin(h) = h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

On en déduit que pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\frac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \frac{h + h\varepsilon_1(h) + 1 - 1 - \frac{h}{2} - h\varepsilon_2(h)}{h + h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2} + h(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{h + h\varepsilon_3(h)}$$

$$\text{D'où : } \frac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \frac{\frac{1}{2} + (\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{1 + \varepsilon_3(h)} \quad \text{Ainsi : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 7. — Calcul de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\text{sh}(h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\blacktriangleright \ln(1+h) = h + h\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$$\blacktriangleright \text{sh}(h) = h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

On en déduit que pour tout réel $h \in]-1, 1[$:

$$\frac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\text{sh}(h)} = \frac{h + h\varepsilon_1(h) + 1 - 1 - \frac{h}{2} - h\varepsilon_2(h)}{h + h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2} + h(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{h + h\varepsilon_3(h)}$$

$$\text{D'où : } \frac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\text{sh}(h)} = \frac{\frac{1}{2} + (\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{1 + \varepsilon_3(h)} \quad \text{Ainsi : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\text{sh}(h)} = \frac{1}{2}$$

QUESTION - BONUS (HORS-PROGRAMME DE LA COLLE 4) A l'aide du formulaire donnant les DL1 usuels en zéro, combien de versions différentes de l'exo 7 pourriez-vous construire ?...

L'exo 8 n'est pas sérieusement destiné à être posé en colle...

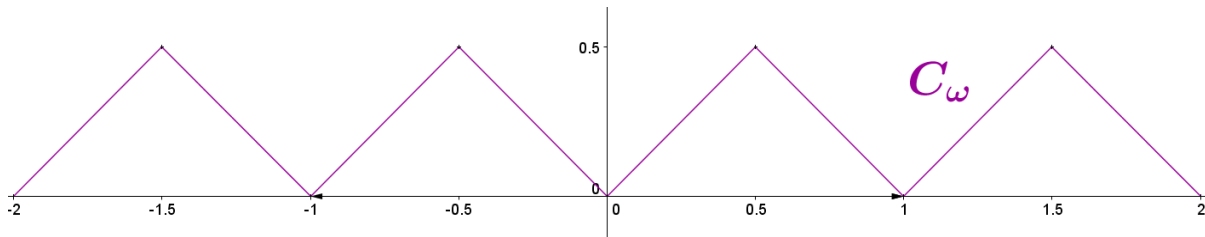
EXERCICE 8. — A l'attention de celles et ceux qui pensent que continue implique dérivable.

On considère les deux assertions logiques suivantes :

P : “On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille”

Q : “On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille, et caresser la courbe de ω sans se piquer”

Une seule des deux implications $P \implies Q$ ou $Q \implies P$ est vraie : laquelle ?



Evidemment $Q \implies P$ est vraie, et $P \implies Q$ est fausse.

Retenez donc que :

DÉRIVABLE $\implies$ CONTINUE

RÉCIPROQUE FAUSSE (contre-exemple avec la fonction valeur absolue)