

QUESTION DE COURS N°1 — **Dérivée n -ème de $\cos$.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

► **Initialisation** ($n = 0$). Pour tout réel x : $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \frac{0 \times \pi}{2}\right)$. $P(0)$ est donc vraie.

► **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

On en déduit que $\cos^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\cos^{(n)}]'(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ Donc $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

QUESTION DE COURS N°2 — Soit f la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ en posant : $\forall x > 1, f(x) = 1/(1-x)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathcal{C}^0$) sur I , et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors : $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = -\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie. La conclusion s'ensuit.

QUESTION DE COURS N°3 — Soit N un entier naturel, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^N$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n} & \text{si } n \in \llbracket 0, N \rrbracket \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$

Preuve par récurrence **finie*** pour la partie non-triviale.

Soit $N \in \mathbb{N}$; pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n}$

► **Initialisation**. Pour $n = 0$, et pour tout réel x on a : $f^{(0)}(x) = f(x) = x^N = \frac{N!}{(N-0)!} x^{N-0}$

On déduit de cette remarquable observation que $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité**. **Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.**

Sous cette hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n}$

Donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{N!}{(N-n)!} (N-n) x^{N-n-1} = \frac{N!}{(N-(n+1))!} x^{N-(n+1)}$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence (finie) établie.

► **Conclusion**. On a prouvé que $P(0)$ est vraie, et que : $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, P(n) \implies P(n+1)$

On en déduit que : $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n}$

En particulier, $f^{(N)}$ est constante égale à $N!$. Il s'ensuit que $f^{(N+1)}$ est nulle, et plus généralement toutes les dérivées $f^{(p)}$ avec p strictement supérieur à N le sont.

*. Une rareté !

QUESTION DE COURS N°4 — **Théorème (formule de Leibniz)** : Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n .

Posons $P(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors :

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right] + f^{(0)} g^{(n+1)} \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal[†] : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. Pour tout entier naturel n , et pour tout couple de fonctions (f, g) de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

QUESTION DE COURS N°5 — **Croissances comparées.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \quad \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons : $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (selon les TG).

Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $f'(x) = e^x - 1 - x$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$).[‡]

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme en outre $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$

On en déduit par comparaison que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (♠)

Par le biais du changement de variable $X = \ln(x)$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

On en déduit avec (♠) que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (♣)

Enfin, soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta \ln(x)}} = e^{\alpha x - \beta \ln(x)} = e^{x(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x})}$$

D'après (♣), on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} = \alpha > 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$.

On en déduit que : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

†. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

‡. Si on ne veut pas utiliser l'argument de convexité, on peut dériver une fois de plus, et obtenir aisément le signe de f'' , comme dans la démo faite en classe.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. —

1/ Justifier que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

2/ On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Etablir que F est impaire.

EXERCICE 2. — Calculer la dérivée n -ième de f , définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)e^{ax+b}$ (avec a et b réels quelconques)

EXERCICE 3. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8}$

EXERCICE 4. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2026^x}{x^{2026}}$

EXERCICE 5. — Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ (*ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes*).

EXERCICE 6. — (**Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 1**). Déterminer les racines carrées de $\omega_1 = 4 + 4i$.

EXERCICE 7. — (**Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 2**). Déterminer les racines carrées de $\omega_2 = 2 + 4i$.

UN MOT SUR LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

THÉORÈME GÉNÉRAL 1.

Soit $\bullet \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\bullet$ partout où il est raisonnable qu'elles le soient.

THÉORÈME GÉNÉRAL 2.

Soit $\bullet \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Tout cocktail (somme, produit, quotient, composée, combinaison linéaire) de fonctions de classe $\mathcal{C}^\bullet$ est de classe $\mathcal{C}^\bullet$ partout où cela est raisonnable.

Exemples d'application.

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(e^x) + (x-1)\ln(1+x^2)}{\operatorname{ch}^3(x) + 1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, f(x) = \frac{\cos(2x - \pi)\sqrt{x}}{x - 1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

EXERCICE 1. —

1/ Justifier que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

Pour tout réel x , on a : $x \geq -|x|$ (♠)

Par ailleurs, pour tout réel x , on a : $x^2 + 1 > x^2$, d'où $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > |x|$ (♣)

On déduit de (♠) et de (♣) que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0}$.

2/ On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Etablir que F est impaire.

D'après la question précédente, la fonction F peut effectivement être définie sur $\mathbb{R}$ (qui est un ensemble symétrique par rapport à zéro).

Observons alors que pour tout réel x on a : §

$$F(-x) + F(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + x^2 + 1) = \ln(1) = 0$$

En résumé : $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) + F(x) = 0$. **Conclusion :** la fonction F est impaire.

EXERCICE 2. — Calculer la dérivée n -ième de f , définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)e^{ax+b}$. Selon les TG, les fonctions $g : x \mapsto 2x - 1$ et $h : x \mapsto e^{ax+b}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geq 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} (2x - 1) a^n e^{ax+b} + \binom{n}{1} 2 a^{n-1} e^{ax+b} = (2x - 1) a^n e^{ax+b} + 2n a^{n-1} e^{ax+b} = [a(2x - 1) + 2n] a^{n-1} e^{ax+b}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = [a(2x - 1) + 2n] a^{n-1} e^{ax+b}$

EXERCICE 3. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8}$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8}$$

$$\iff e^{2x^2 \ln(x)} = e^{(12x-8) \ln(\sqrt{x})}$$

$$\iff e^{2x^2 \ln(x)} = e^{(6x-4) \ln(x)}$$

$$\iff (2x^2 - 6x + 4) \ln(x) = 0$$

$$\iff (x^2 - 3x + 2) \ln(x) = 0$$

$$\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 0$$

Or l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ possède exactement deux solutions : 1 et 2. Et l'équation $\ln(x) = 0$ possède une unique solution, qui est 1.

Conclusion. $\boxed{x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8} \iff [x \in \{1, 2\}]}$

§. Pour montrer la fonction F est impaire, il s'agit d'établir que pour tout réel x , on a : $F(-x) = -F(x)$, ou, ce qui revient au même : $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) + F(x) = 0$.

EXERCICE 4. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2026^x}{x^{2026}}$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$\frac{2026^x}{x^{2026}} = \frac{e^{x \ln(2026)}}{e^{2026 \ln(x)}} = e^{x \ln(2026) - 2026 \ln(x)} = e^{x \left(\ln(2026) - 2026 \frac{\ln(x)}{x} \right)}$$

Selon le cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées). Il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln(2026) - 2026 \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$.

Conclusion. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2026^x}{x^{2026}} = +\infty$

EXERCICE 5. — Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ (ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{1/x} = e^{\ln(x)/x}$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Il s'ensuit que f' est du signe de $1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f' est positive ou nulle sur $]0, e]$, négative ou nulle sur $[e, +\infty[$.

On en déduit que f est croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $[e, +\infty[$.

Il s'ensuit que f admet un maximum en e , égal à $f(e) = e^{1/e}$.

En outre : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (propriétés usuelles des limites) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (croissances comparées)

Remarque. On peut présenter ces résultats à l'aide d'un tableau de variation correctement rempli (c'est plus visuel) ; mais les infos contenues dans ce tableau (signe de f' , variation de f , limites aux bornes) doivent être justifiées, à l'aide des arguments donnés ci-dessus.

EXERCICE 6. — (**Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 1**). Déterminer les racines carrées de $\omega_1 = 4 + 4i$.

Selon le cours : $|\omega_1| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 2^{5/2}$

Il est par ailleurs immédiat que : $\arg(\omega_1) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ (un petit dessin suffira)

On en déduit que : $\omega_1 = 2^{5/2} e^{i\pi/4}$.

Conclusion. Les deux racines carrées de ω_1 sont $\pm 2^{5/4} e^{i\pi/8}$

EXERCICE 7. — (**Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 2**). Déterminer les racines carrées de $\omega_2 = 2 + 4i$.

Selon le cours : $|\omega_2| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

En notant θ un argument de ω_2 , on en déduit que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Puisque $\frac{\sqrt{5}}{5}$ est une valeur remarquable de $\cos$, et $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ une valeur remarquable de $\sin$, on peut conclure : $\theta = ??? \dots$

On utilise donc l'autre méthode !

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 2 + 4i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 2 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième lignes que $a = \pm\sqrt{1 + \sqrt{5}}$ et $b = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 1}$. La seconde ($2ab = 4$) signifie que a et b sont de même signe, et permet ainsi de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $2 + 4i$ sont $\sqrt{1 + \sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5} - 1}$ et $-\sqrt{1 + \sqrt{5}} - i\sqrt{\sqrt{5} - 1}$.