

COLLE 6 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N⁰1 — **Somme des racines n -èmes de l'unité.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2i\pi/n} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{2i\pi/n} \right)^n}{1 - e^{2i\pi/n}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2i\pi/n}} = 0. \text{ Ainsi : } \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Remarque 1. Pour les amoureux du détail (je ne doute pas un instant que tous les MPSI le sont), la somme calculée ci-dessus est géométrique, de raison $e^{2i\pi/n}$. La condition $n \geq 2$ assure que cette raison est différente de 1, et rend légitime l'utilisation de la formule " $\frac{1-q^n}{1-q}$ " pour calculer la somme considérée.

Remarque 2. Pour les amoureux de géométrie (je ne doute pas un instant que tous les MPSI le sont), la propriété ci-dessus signifie que l'origine du plan est le centre de gravité du polygone dont les sommets sont les racines n -èmes de l'unité.

QUESTION DE COURS N⁰2 — **Propriété :** la composée de deux applications injectives est injective.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Supposons f et g injectives.

Soient x et x' deux éléments de E . Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \implies [g(f(x)) = g(f(x'))] \xRightarrow{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \xRightarrow{f \text{ injective}} [x = x']$$

En résumé : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$. Ce qui signifie que $g \circ f$ est injective.

Conclusion : si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

QUESTION DE COURS N⁰3 — **Propriété :** la composée de deux applications surjectives est surjective.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Supposons f et g surjectives.

Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists y \in F, g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists x \in E, f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on obtient : $g(f(x)) = z$.

On a ainsi établi que : $\forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z$. Ce qui signifie que $g \circ f$ est surjective.

Conclusion : si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat des questions de cours 2 et 3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

QUESTION DE COURS N⁰4 — **Propriété.** Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Supposons que $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives. Alors $(g \circ f)$ est bijective comme conséquence immédiate des 2 questions de cours précédentes.

En outre :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (\text{id}_F \circ f) = f^{-1} \circ f = \text{id}_E$$

en utilisant essentiellement l'associativité de la composition, le fait que l'identité est l'élément neutre pour la composition des applications, et la définition de g^{-1} .

En résumé : $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_E$ (♠)

De manière analogue, on vérifie sans peine que : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_F$ (♣)

On déduit de (♠) et (♣) que : $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$

QUESTION DE COURS N°5 — **Théorème (implication 1)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.

[Il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$] $\implies f$ est bijective

Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que : $f(x) = f(x')$. On a alors : $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g \circ f = \text{id}_E$, on en déduit $x = x'$. Ce qui prouve que f est injective.

Soit y un élément de f . On a : $y = \text{id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y admet un antécédent par f (qui est $g(y)$). Puisque y est un élément arbitraire de F dans ce petit raisonnement, on en déduit que f est surjective.

L'application f étant injective et surjective, elle est bijective.

Conclusion : s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est bijective.

QUESTION DE COURS N°6 - **VOLONTARIAT** — **Théorème (implication 2)**. Soit $f \in F^E$. On a :

f est bijective $\implies$ il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$

Supposons f bijective.

Puisque f est bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent dans E par f , que nous noterons x_y .

On définit alors une application $g : F \longrightarrow E$ en posant pour tout élément y de F : $g(y) = x_y$ (on associe à y son unique antécédent par f).

Vérifions que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Pour la première égalité : soit $y \in F$. Alors $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ (puisque x_y est l'unique antécédent de y par f). Ainsi : $f \circ g = \text{id}_F$.

Passons à la seconde égalité : soit $x \in F$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ (puisque, f étant bijective, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f). Ainsi : $g \circ f = \text{id}_E$.

Conclusion : si f est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Synthèse des questions de cours 5 et 6.

L'application f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \text{id}_F \text{ et } g \circ f = \text{id}_E$$

QUESTION DE COURS N°7 - **VOLONTARIAT** — **Propriété ("unicité de la réciproque")**. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une application $g_1 \in E^F$ telle que $f \circ g_1 = \text{id}_F$ et $g_1 \circ f = \text{id}_E$.*

Montrons son unicité. A cette fin, supposons qu'il existe g_1 et $g_2 \in E^F$ telles que $f \circ g_1 = \text{id}_F = f \circ g_2$ et $g_1 \circ f = \text{id}_E = g_2 \circ f$. Alors :

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) \quad (\text{associativité de la composition})$$

$$\iff \text{id}_E \circ g_2 = g_1 \circ \text{id}_F \quad (\text{par hypothèse})$$

$$\iff g_2 = g_1 \quad (\text{"l'identité est le neutre pour la composition"})$$

Ce qui prouve l'unicité de g_1 .

Conclusion. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une application $g_1 \in E^F$ telle que $f \circ g_1 = \text{id}_F$ et $g_1 \circ f = \text{id}_E$

*. Selon la question de cours 3.

QUESTION DE COURS N°8 - **VOLONTARIAT** — **Théorème (description de $\mathbb{U}_n$)**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit z une racine n -ième de l'unité. Par définition, on a alors : $z^n = 1$. Cette condition impliquant la non-nullité de z , on peut écrire z sous forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$ (avec $\theta = \arg(z) [2\pi]$).

Ceci posé : $[z^n = 1] \iff |z|^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 [2\pi/n] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi/n \end{cases}$

En résumé : $[z^n = 1] \iff [\exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{2ik\pi/n}]$. On a ainsi établi que : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} (\spadesuit)$.

Reste à justifier que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, et contient n éléments. Pour cela, on **admet** provisoirement $\ddagger$ le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème (division euclidienne dans $\mathbb{Z}$). $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket \end{cases}$

Posons : $E = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} (\heartsuit)$. Etablir le théorème, c'est établir l'égalité : $E = \mathbb{U}_n$. Pour ce faire, on peut procéder par double inclusion.

► Montrons $E \subset \mathbb{U}_n$. Il résulte clairement des descriptions respectives de E ($\heartsuit$) et de $\mathbb{U}_n$ ($\spadesuit$) que tout élément de E appartient à $\mathbb{U}_n$,[§] donc $E \subset \mathbb{U}_n$.

► Montrons $\mathbb{U}_n \subset E$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. D'après ($\spadesuit$), il existe un entier relatif k tel que : $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On effectue alors la division euclidienne de k par n . D'après le théorème du même nom :

$$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} k = nq + r \\ r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

Ainsi : $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(nq+r)\pi}{n}} = e^{\frac{2inq\pi}{n}} \times e^{\frac{2ir\pi}{n}} = \underbrace{\left(e^{\frac{2in\pi}{n}} \right)^q}_{=1} \times e^{\frac{2ir\pi}{n}}$ d'où : $z = e^{\frac{2ir\pi}{n}}$. Puisque $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

cette dernière écriture signifie que $z \in E$. Ce qui prouve que $\mathbb{U}_n \subset E$.

D'après la règle de double inclusion, on peut affirmer que $E = \mathbb{U}_n$. Par suite : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$

QUESTION DE COURS N°9 - **VOLONTARIAT** — **Propriété**. Soit E un ensemble. Notons $\text{Bij}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E . Avec ces notations, $(\text{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

- ① La composition des applications est associative (propriété générale du cours).
- ② Si f et g sont dans $\text{Bij}(E)$, alors $(g \circ f) \in \text{Bij}(E)$, puisque la composée de deux bijections est encore une bijection (corollaire des questions de cours 2 et 3).
- ③ L'application id_E est une bijection de E dans E , car c'est une involution de E .
- ④ Si f est dans $\text{Bij}(E)$, alors f est une bijection de E dans E , et admet une bijection réciproque qui est également une bijection de E dans E . Ainsi : $f^{-1} \in \text{Bij}(E)$. Et il est connu que : $f^{-1} \circ f = \text{id}_E = f \circ f^{-1}$.

Bilan. L'ensemble $\text{Bij}(E)$ est stable par composition (selon ②) ; l'identité de E est l'élément neutre pour la composition dans $\text{Bij}(E)$ (selon ③) ; et tout élément f de $\text{Bij}(E)$ admet un inverse (sa bijection réciproque f^{-1}) pour la composition dans $\text{Bij}(E)$ (selon ④). En outre, la composition est associative (selon ①).

Conclusion. Pour les 4 raisons évoquées dans le paragraphe précédent, $(\text{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

†. Ou encore : $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ en ayant noté $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

‡. En attendant le chapitre d'arithmétique, en 2027.

§. Ceci repose sur l'observation puissante que tout entier compris entre 0 et $n-1$ est en particulier un entier relatif.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — (Application des racines 5-èmes de l'unité).

Déterminer la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

EXERCICE 2. — (Une “pseudo-réciproque”, 1). Soient E , F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que : $[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$

EXERCICE 3. — (Une “pseudo-réciproque”, 2). Soient E , F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que : $[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$

EXERCICE 4. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1} .

EXERCICE 5. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

EXERCICE 6. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(1 + j)^{600}$.

EXERCICE 7. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe. On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

EXERCICE 8. — (Equation et binôme de Newton) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$, en utilisant le binôme de Newton.

BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

EXERCICE 1. — (Application des racines 5-èmes de l'unité).

Déterminer la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

Selon le cours : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega = 0$. Explicitement : $\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} = 0$. En particulier : $\operatorname{Re}(\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5}) = 0$. D'où :

$$\sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0. \quad \text{D'où : } 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (par une double application de la formule : $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$).

Ainsi : $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

On a donc : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque

$2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$) pour conclure que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

EXERCICE 2. — (Une “pseudo-réciproque”, 1). Soient E , F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$$

Supposons $g \circ f$ injective.

Soient x et x' deux éléments de E . Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que $x = x'$.

Finalement : $\forall (x, x') \in E^2, [f(x) = f(x')] \implies [x = x']$. Ce qui signifie que f est injective.

Conclusion. $[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$.

EXERCICE 3. — (Une “pseudo-réciproque”, 2). Soient E , F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$$

Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse, il existe un élément x de E tel que : $g(f(x)) = z$. D'où $z \in g(F)$, ce qui signifie que g est surjective.

Ainsi : $[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$.

EXERCICE 4. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1} .

Soit (X, Y) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $F(x, y) = (X, Y)$.

$$\text{On a : } F(x, y) = (X, Y) \iff \begin{cases} 4x - 3y = X & (L_1) \\ 2x + y = Y & (L_2) \end{cases}$$

$$\text{Alors : } 2(L_2) - (L_1) \iff 5y = 2Y - X \iff y = \frac{2Y - X}{5}.$$

$$\text{Et : } (L_1) + 3(L_2) \iff 10x = X + 3Y \iff x = \frac{X + 3Y}{10}.$$

$$\text{En d'autres termes : } F(x, y) = (X, Y) \iff (x, y) = \left(\frac{X + 3Y}{10}, \frac{2Y - X}{5} \right).$$

On a ainsi établi que tout élément (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par F dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application F est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto \left(\frac{X + 3Y}{10}, \frac{2Y - X}{5} \right) \end{aligned}$$

EXERCICE 5. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Soit z un nombre complexe distinct de i . On a :

$$(z + i)^5 = (z - i)^5$$

$$\iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^5 = 1$$

$$\iff \frac{z + i}{z - i} \in \mathbb{U}_5$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad \frac{z + i}{z - i} = \omega^k \quad (\text{en ayant noté } \omega = e^{2i\pi/5})$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad z + i = \omega^k (z - i)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad (1 + \omega^k) i = (\omega^k - 1) z$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} i$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{e^{2ik\pi/5} + 1}{e^{2ik\pi/5} - 1} i$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} i \quad (\text{technique de l'angle-moitié})$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left[(z+i)^5 = (z-i)^5\right] \iff \left[\exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right]$

Remarque. La fonction cotangente, notée $\cotan$, est définie (sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$) en posant $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.

EXERCICE 6. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(1+j)^{600}$.

Selon le cours : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_3} \omega = 0$. En particulier : $1+j+j^2 = 0$ (puisque : $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$).

Il s'ensuit que $1+j = -j^2$. Donc :

$$(1+j)^{600} = (-j^2)^{600} = j^{1200} = (j^3)^{400} = 1^{400} = 1$$

Conclusion. $(1+j)^{600} = 1$

EXERCICE 7. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe.

On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta} z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Soit $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } R \iff R(z) = Z \iff e^{i\theta} z + b = Z \iff z = \frac{Z-b}{e^{i\theta}}$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par R , qui est $e^{-i\theta}(Z-b)$.

Conclusion. On déduit que R est bijective, et que sa bijection réciproque est $R^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$Z \longmapsto e^{-i\theta}(Z-b)$$

EXERCICE 8. — (Equation et binôme de Newton) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$, en utilisant le binôme de Newton.

Soit z un complexe :

$$\begin{aligned}(z + i)^5 &= (z - i)^5 \\ \iff z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10iz^2 + 5iz + i &= z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5iz - i \\ \iff 10iz^4 - 20iz^2 + 2i &= 0 \\ \iff 5z^4 - 10z^2 + 1 &= 0 \quad (\spadesuit)\end{aligned}$$

Réolvons l'équation $(\spadesuit)$. Via le changement de variable $Z = z^2$, celle-ci se réécrit : $5Z^2 - 10Z + 1 = 0 \quad (\clubsuit)$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 80$. En observant que $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, on en déduit que les solutions de $(\clubsuit)$ sont :

$$Z_{1,2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{10} \quad \text{càd} \quad Z_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

En revenant à la variable initiale, on en déduit que z est solution de l'équation initiale SSI :

$$z^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou} \quad z^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$$

En observant que les réels $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$ et $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$ sont strictement positifs[¶], on en déduit finalement les solutions de l'équation.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$(z + i)^5 = (z - i)^5 \iff z \in \left\{ \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \right\}$$

Remarque (non-exigible en colle). On peut déduire des exos 5 et 8 la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

En effet, ces deux exos donnent 2 méthodes pour la résolution de la même équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$. On peut donc en déduire que les ensembles de solutions sont les mêmes(!), càd :

$$\left\{ \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \right\}$$

Puisque $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sont positifs (la fonction tangente est à valeurs positives sur $[0, \pi/2[$), on en déduit que :

$$\left\{ \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \right\}$$

En observant que $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} > \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \quad \text{d'où} \quad \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{5 + 2\sqrt{5}}}$$

Ainsi : $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ ^{||}

[¶]. Pour le premier c'est évident ; pour le second, il suffit d'observer que $5^2 = 25$ est strictement supérieur à $(2\sqrt{5})^2 = 20 \dots$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour les amoureux du détail (je ne doute pas un instant...).

^{||}. La dernière simplification est fun !