

# PROBLÈME DE LA TOUSSAINT

---

## DESCRIPTIF

EXERCICE 1 — Développements limités et limites (**vivement recommandé**)

PROBLÈME 1 — Autour de la fonction tangente hyperbolique (**vivement recommandé**)

PROBLÈME 2 — A propos du pentagone et de l’heptakaïdécagone réguliers (**challenge**)

Ci-dessous, quelques exercices pour passer une bonne soirée (EPPUBS) !

EPPUBS 1 — Limite (**vivement recommandé**)

EPPUBS 2 — Une propriété de  $\mathbb{U}_n$  (**challenge**)

EPPUBS 3 — Une autre propriété de  $\mathbb{U}_n$  (**challenge**)

EPPUBS 4 — Une CNS de bijectivité (**challenge**)

EPPUBS 5 — Une pseudo-pseudo-réciproque... (**challenge**)

EPPUBS 6 — Une autre pseudo-pseudo-réciproque... (**challenge**)

---

**EXERCICE 1 — (DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET LIMITES).**

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $\ln(1+x)$ .

2/ Dédurre de la question précédente les limites :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

3/ Le but de cette question est de calculer :  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ .

a/ Etablir que pour tout réel  $x$  positif ou nul, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b/ En déduire qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

c/ Dédurre de ce qui précède que la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ n^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - n \right]$  est finie (càd est égale à un réel).  
Préciser sa valeur.

d/ Dédurre de ce qui précède la valeur de  $\ell_3$ .

**PROBLÈME 1 — (AUTOUR DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE).**

**Problématique.** Le principal objectif de ce problème est d'étudier la fonction tangente hyperbolique (notée  $\mathbf{T}$  dans ce sujet), définie sur  $\mathbb{R}$  comme le quotient  $\text{sh}/\text{ch}$ .

**NOTATIONS - RAPPELS.**

► Tout au long du problème, on note  $\mathbf{T}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \quad \text{soit encore :} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

► On rappelle que si  $z = a + ib$  (avec  $a$  et  $b$  réels) désigne un nombre complexe, l'exponentielle de  $z$  est le nombre complexe noté  $e^z$  défini en posant :

$$e^z = e^a e^{ib}$$

**Questions préliminaires**

Les trois questions ci-dessous sont indépendantes.

**1/ Décomposition en éléments simples.** Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

**2/** Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. Etablir que<sup>1</sup> :

$$[e^{z'} = e^z] \iff [\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z' = z + 2ik\pi]$$

**3/** Pour tout réel  $x \in ]-1, 1[$ , on pose :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

**Remarque.** Dans la suite de l'énoncé, on pourra admettre que si l'on pose  $g(x) = \frac{1}{1-x}$  pour tout réel  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

---

1. Cette équivalence peut aussi être notée :  $[e^{z'} = e^z] \iff [z' = z + 2i\pi]$

## Partie 1 - Quelques propriétés de la fonction $\mathbf{T}$

4/ Etablir que  $\mathbf{T}$  est impaire ; puis préciser ses limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

5/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

6/ Dédurre des questions précédentes le tableau de variation de  $\mathbf{T}$ .

7/ Justifier brièvement que l'équation  $\mathbf{T}(x) = 2$  ne possède aucune solution dans  $\mathbb{R}$ .

8/ Soit  $y$  un nombre réel, tel que  $|y| < 1$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\mathbf{T}(x) = y$$

## Partie 2 - Quelques propriétés de la réciproque de $\mathbf{T}$

On définit une fonction  $\mathbf{A}$  sur  $] -1, 1[$  en posant :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \mathbf{A}(x) = \ln \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

9/ Démontrer que  $\mathbf{A} \circ \mathbf{T} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$ , c'est à dire démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{T}(x)) = x$$

10/ Etablir que :

$$\forall x \in I, \quad \mathbf{A}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

11/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction  $\mathbf{A}$ .

12/ Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)}$

13/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in ] -1, 1[, \quad \mathbf{A}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2} \left( \frac{(1+x)^n + (-1)^{n+1} (1-x)^n}{(1-x^2)^n} \right)$$

**PROBLÈME 2 — (A PROPOS DU PENTAGONE ET DE L'HEPTAKAÏDÉCAGONE RÉGULIERS).**<sup>2</sup>

L'objectif de ce problème est de déterminer les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  de  $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ .

Plus précisément, il s'agit de montrer que ces cosinus peuvent s'exprimer **par radicaux carrés**, c'est-à-dire (grossièrement) que l'on peut en trouver des expressions ne faisant intervenir que des combinaisons finies de quotients et de racines carrées de rationnels.

A titre d'exemples,  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  et  $e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$  sont des expressions par radicaux carrés ; et  $\pi - \ln(3)$ ,  $3e + \cos(1)$ ,  $\operatorname{sh}(\pi)$  n'en sont pas.

*Première partie — Calcul de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$*

Le calcul de la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  a été récemment fait en cours, comme application de la propriété affirmant que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle. On propose dans cette partie une méthode alternative pour déterminer cette valeur exacte. A cette fin, on considère l'équation

$$(E) : \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

1/ Soit  $z$  un nombre complexe. Calculer l'expression  $f(z) = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ .

2/ A l'aide de la question précédente, établir que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est  $\mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$ .

On pose à présent :  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ . L'équation  $(E)$  s'écrit alors :  $Q(z) = 0$ .

3/ Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{Q(z)}{z^2} = a \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b \left(z + \frac{1}{z}\right) + c$$

4/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $aZ^2 + bZ + c = 0$  (on exprimera les solutions par radicaux carrés).

5/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Q(z) = 0$ .

6/ Dédurre des questions précédentes les valeurs exactes de :  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

(au regard de l'objectif du problème, on exprimera ces valeurs par radicaux carrés).

2. Juste au cas où, on précise qu'un *heptakaïdécagone* est un polygone à 17 côtés.

*Deuxième partie — Calcul de  $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$*

7/ Jusqu'à la fin du problème, on pose  $\theta = \frac{\pi}{17}$ .

En outre, on pose :

$$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

a/ Montrer que  $x_1 > 0$ .

b/ Calculer  $x_1 + x_2$  (*indication* : le résultat est un rationnel "simple").

c/ Calculer le produit  $x_1 x_2$  (*indication*<sup>3</sup> : on établira que  $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$ ).

d/ Dédurre des questions précédentes les valeurs exactes de  $x_1$  et  $x_2$  (que l'on exprimera par radicaux carrés).

8/ On pose à présent :

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$

$$y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$

$$y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

a/ En s'inspirant de la question précédente, calculer les produits  $y_1 y_2$  et  $y_3 y_4$ .

b/ En déduire les valeurs exactes de  $y_1, y_2, y_3$  et  $y_4$  (que l'on tâchera d'exprimer par radicaux carrés).

c/ Calculer le produit  $P = \cos(\theta) \cos(13\theta)$ , et en déduire une méthode qui permette d'obtenir l'expression de  $\cos(\theta)$  par radicaux carrés.

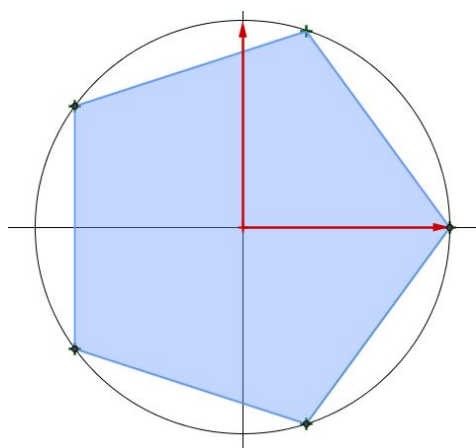
Remarque : à l'issue de la dernière question du problème, on obtient une équation dont la résolution (que je ne vous demande pas de faire ici<sup>4</sup>) donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}}{16}$$

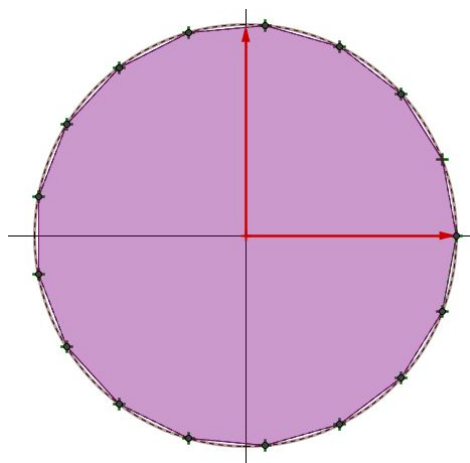
On peut déduire de ce résultat la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ . Il "suffit" en effet d'utiliser la formule de duplication pour le cosinus... Puis, à l'aide de cette valeur exacte, on peut construire très précisément (à l'aide d'une règle non-graduée et d'un compas) un polygone régulier à dix-sept cotés. Pour des raisons algébriques assez profondes, une telle construction n'est pas possible pour un polygone régulier à  $n$  côtés avec  $n$  arbitraire (c'est impossible par exemple pour  $n = 13$  ou  $n = 14$  ou  $n = 19$ ).

3. Plus que jamais, l'indication donnée ici a pour objectif de vous permettre d'aller plus loin dans le sujet (pour peu que vous ayez traité la question précédente). En clair, il n'y a pas de méthode expéditive pour obtenir la relation " $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$ "; il faut de la patience et de l'astuce pour parvenir à l'établir.

4. C'est gentil, n'est-ce pas ?



PENTAGONE RÉGULIER



HEPTAKAÏDÉCAGONE RÉGULIER

## EXERCICES POUR PASSER UNE BONNE SOIRÉE

## EPPUBS 1 — (LIMITE).

Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)}{x^{2/3}}$

EPPUBS 2 — (UNE PROPRIÉTÉ DE  $\mathbb{U}_n$ ).

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Calculer le produit des racines  $n$ -èmes de l'unité, c'est-à-dire calculer le produit :

$$P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$$

EPPUBS 3 — (UNE AUTRE PROPRIÉTÉ DE  $\mathbb{U}_n$ ).

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = 2 \cotan \left( \frac{\pi}{2n} \right)$$

où l'on a noté :  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ .

## EPPUBS 4 — (UNE CNS DE BIJECTIVITÉ).

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \longrightarrow F$  une application.

Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

## EPPUBS 5 — (UNE PSEUDO-PSEUDO-RÉCIPROQUE...).

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow E$  deux applications. Etablir que :

$$[(g \circ f) \text{ injective et } f \text{ surjective}] \implies [g \text{ injective}]$$

## EPPUBS 6 — (UNE AUTRE PSEUDO-PSEUDO-RÉCIPROQUE...).

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow E$  deux applications. Etablir que :

$$[(g \circ f) \text{ surjective et } g \text{ injective}] \implies [f \text{ surjective}]$$