

EXERCICES 4 BIS – NOMBRES COMPLEXES

(2^{NDE} PARTIE)

RÉVISIONS - RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 1. — Calculer les racines carrées des complexes :

$$1/ z_1 = -i; \quad 2/ z_2 = 2 + 2i; \quad 3/ z_3 = \sqrt{3} + i; \quad 4/ z_4 = -4i; \quad 5/ z_5 = 3 - 3i$$

EXERCICE 2. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $3 - 4i$.

EXERCICE 3. — Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $\frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}$ en utilisant :

$$1/ \text{ la forme algébrique de } Z; \quad 2/ \text{ la forme trigonométrique de } Z$$

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 4. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $5 - 2i$.

EXERCICE 5. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 4 + 6i \end{cases}$$

EXERCICE 6. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1/ z^2 + 2z + i = 0 \quad | \quad 2/ z^2 + 5z + 7 - i = 0 \quad | \quad 3/ z^8 - 3z^4 + 2 = 0$$

RACINES n -IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 7. — On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(1 + j)^{30}$.

EXERCICE 8. — Calculer les racines cubiques des complexes :

$$z_1 = i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; \quad z_4 = 1 + j \text{ où } j = e^{2i\pi/3}.$$

EXERCICE 9. — Déterminer les racines 4-èmes de $Z = 1 + i$.

EXERCICE 10. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) \quad z^4 - z^2 - 2 = 0$

EXERCICE 11. — Montrer que : $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1$

EXERCICE 12. — Dédire de l'exercice précédent la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$. Comment peut-on en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$?

EXERCICE 13. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

EXERCICE 14. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = z^n$.

EXERCICE 15. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\bar{z} = z^n$.

EXERCICE 16. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) \quad (z + i)^5 = (z - i)^5$

EXERCICE 17. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 1)^n = (z - 1)^n$.

EXERCICE 18. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + iz)^n = (1 - iz)^n$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 19. — **(EQUATION COMPLEXE).** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 + z^4 - 2 = 0$$

EXERCICE 20. — **(SYSTÈME)** Etablir qu'il existe exactement 8 couples (u, v) de nombres complexes, que l'on explicitera, tels que :

$$\begin{cases} u^2 v = 2 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases}$$

EXERCICE 21. — **(EQUATION COMPLEXE).**

1/ Déterminer les racines quatrièmes de 16 dans $\mathbb{C}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+z)^4 = 16(1-z)^4$.

On montrera en particulier que (E) possède une solution dans $\mathbb{Z}$, une solution dans $\mathbb{Q}$, et deux solutions complexes conjuguées.

EXERCICE 22. — Soit α un réel non multiple de π . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 2 \cos(\alpha)$$

EXERCICE 23. — **(A LA RECHERCHE DE $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$).**

Dans cet exercice, on pose :

$$\omega = e^{2i\pi/7}, \quad A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

1/ Etablir que : $A + B = -1$.

2/ Etablir que :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$$

3/ Calculer AB .

4/ Etablir que : $\operatorname{Im}(A) > 0$.

5/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B .

6/ En déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$