

EXERCICES 4 BIS – NOMBRES COMPLEXES (2NDE PARTIE) – CORRIGÉS

RÉVISIONS - RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 1. — Calculer les racines carrées des complexes :

$$1/ z_1 = -i; \quad 2/ z_2 = 2 + 2i; \quad 3/ z_3 = \sqrt{3} + i; \quad 4/ z_4 = -4i; \quad 5/ z_5 = 3 - 3i$$

1/ $z_1 = -i = e^{i\pi/2}$. Les racines carrées de z_1 sont donc : $\pm e^{i\pi/4} = \pm i$.

2/ $z_2 = 2 + 2i = 2^{3/2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de z_2 sont donc : $\pm 2^{3/4}e^{i\pi/8}$.

3/ $z_3 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$. Les racines carrées de z_3 sont donc : $\pm 2^{1/2}e^{i\pi/12}$.

4/ $z_4 = -4i = 4e^{-i\pi/2}$. Les racines carrées de z_4 sont donc : $\pm 2e^{-i\pi/4}$.

5/ $z_5 = 3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Les racines carrées de z_5 sont donc : $\pm 3^{1/2}2^{1/4}e^{-i\pi/8}$.

EXERCICE 2. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $3 - 4i$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 3 + 4i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 5 & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième ligne que $a = \pm 2$ et $b = \pm 1$. La seconde ($2ab = 4$) signifie que a et b sont de même signe, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $\pm (2 + i)$.

EXERCICE 3. — Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $\frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}$ en utilisant :

$$1/ \text{ la forme algébrique de } Z; \quad 2/ \text{ la forme trigonométrique de } Z$$

Que peut-on en déduire ?

$$1/ \text{ D'une part : } Z = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}.$$

Les racines carrées de Z sont donc : $\pm e^{i\pi/3}$.

$$2/ \text{ D'autre part : } Z = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{5i\pi/6}}{e^{i\pi/6}} = e^{2i\pi/3}.$$

Les racines carrées de Z sont donc : $\pm e^{i\pi/3}$.

EXERCICE 4. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $5 - 2i$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 5 - 2i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 5 - 2i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = -2 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{29} & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième ligne que $a = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{29}}{2}}$ et $b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{29} - 5}{2}}$. La seconde ($2ab = -2$) signifie que a et b sont de signe opposé, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $5 - 2i$ sont $\pm \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{29}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{29} - 5}{2}} \right)$.

EXERCICE 5. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 4 + 6i \end{cases}$$

1/ Un couple de complexes (x, y) est solution de (S_1) si et seulement si x et y sont les deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, en ayant posé $S = x + y$ et $P = xy$. Dans le cas présent, cette équation s'écrit : $X^2 - 2X + 2 = 0$, et ses racines sont $1 \pm i$.

Conclusion. Le système (S_1) admet exactement deux couples solutions : $(1 + i, 1 - i)$ et $(1 - i, 1 + i)$.

2/ Un couple de complexes (x, y) est solution de (S_2) si et seulement si x et y sont les deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, en ayant posé $S = x + y$ et $P = xy$. Dans le cas présent, cette équation s'écrit : $X^2 - (1 + i)X + 13i = 0$.

Contrairement au cas précédent, la résolution mérite d'être détaillée : le discriminant est $\Delta = -50i$. L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{1 + i \pm 5 \underbrace{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}_{=1-i}}{2} = \frac{1 + i \pm 5(1 - i)}{2} = 3 - 2i \text{ ou } -2 + 3i$$

Conclusion. Le système (S_2) admet exactement deux couples solutions : $(3 - 2i, -2 + 3i)$ et $(-2 + 3i, 3 - 2i)$.

EXERCICE 6. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1/ $z^2 + 2z + i = 0$

Cette équation du 2nd degré a pour discriminant : $\Delta = 4(1 - i) = 4\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2^{5/2}e^{-i\pi/4} = (2^{5/4}e^{-i\pi/8})^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{-2 \pm 2^{5/4}e^{-i\pi/8}}{2} = -1 \pm 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$$

Conclusion. $z^2 + 2z + i = 0 \iff -1 \pm 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$

$$2/ \quad z^2 + 3z + 3 - i = 0$$

Cette équation du 2nd degré a pour discriminant : $\Delta = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{-3 \pm (1 + 2i)}{2} = -1 + i \quad \text{ou} \quad -2 - i$$

Conclusion. $z^2 + 3z + 3 - i = 0 \iff z \in \{-1 + i, -2 - i\}$

$$3/ \quad z^2 - 2z + 2 + i = 0$$

Cette équation du 2nd degré a pour discriminant : $\Delta = -4 - 4i = 2^{5/2}e^{-3i\pi/4} = (2^{5/4}e^{-3i\pi/8})^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$1 \pm 2^{1/4}e^{-3i\pi/8}$$

Conclusion. $z^2 + 3z + 3 - i = 0 \iff z \in \{1 \pm 2^{1/4}e^{-3i\pi/8}\}$

$$4/ \quad z^2 - 2iz + 1 = 0$$

Cette équation du 2nd degré a pour discriminant : $\Delta = -8 = (2^{3/2}i)^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$i \pm 2^{1/2}i$$

Conclusion. $z^2 + 3z + 3 - i = 0 \iff z \in \{(1 + \sqrt{2})i, (1 - \sqrt{2})i\}$

RACINES n -IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 7. — On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(1 + j)^{30}$.

Selon le cours : $1 + j + j^2 = 0$. D'où : $1 + j = -j^2$.

Ainsi : $(1 + j)^{30} = (-j^2)^{30} = j^{60} = (j^3)^{20} = 1^{20}$.

Conclusion. $(1 + j)^{30} = 1$

EXERCICE 8. — Calculer les racines cubiques des complexes :

$$z_1 = i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; \quad z_4 = 1 + j \text{ où } j = e^{2i\pi/3}.$$

1/ Soit z un complexe. On a :

$$z^3 = i \iff z^3 = e^{i\pi/2} \iff z^3 = (e^{i\pi/6})^3 \iff \left(\frac{z}{e^{i\pi/6}}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{e^{i\pi/6}} \in \mathbb{U}_3$$

Puisque $\mathbb{U}_3 = \{j^k, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[z^3 = i] \iff [\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = j^k e^{i\pi/6}]$

2/ Soit z un complexe. On a :

$$z^3 = 2 - 2i \iff z^3 = 2^{3/2}e^{-i\pi/4} \iff z^3 = (2^{1/2}e^{-i\pi/12})^3 \iff \left(\frac{z}{2^{1/2}e^{-i\pi/12}}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{2^{1/2}e^{-i\pi/12}} \in \mathbb{U}_3$$

Puisque $\mathbb{U}_3 = \{j^k, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[z^3 = 2 - 2i] \iff [\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = j^k 2^{1/2}e^{-i\pi/12}]$

3/ Soit z un complexe. On a :

$$z^3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \iff z^3 = e^{2i\pi/3} \iff z^3 = (e^{2i\pi/9})^3 \iff \left(\frac{z}{e^{2i\pi/9}}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{e^{2i\pi/9}} \in \mathbb{U}_3$$

Puisque $\mathbb{U}_3 = \{j^k, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left[z^3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right] \iff [\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = j^k e^{2i\pi/9}]$

4/ Commençons par observer que :

$$1 + j = -j^2 = -e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}$$

Soit z un complexe. On a d'après ce qui précède :

$$z^3 = 1 + j \iff z^3 = e^{i\pi/3} \iff z^3 = (e^{i\pi/9})^3 \iff \left(\frac{z}{e^{i\pi/9}}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{e^{i\pi/9}} \in \mathbb{U}_3$$

Puisque $\mathbb{U}_3 = \{j^k, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[z^3 = 1 + j] \iff [\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = j^k e^{i\pi/9}]$

EXERCICE 9. — Déterminer les racines 4-èmes de $Z = 1 + i$.

Soit z un complexe. On a :

$$z^4 = 1 + i \iff z^4 = 2^{1/2}e^{i\pi/4} \iff z^4 = (2^{1/8}e^{i\pi/16})^4 \iff \left(\frac{z}{2^{1/8}e^{i\pi/16}}\right)^4 = 1 \iff \frac{z}{2^{1/8}e^{i\pi/16}} \in \mathbb{U}_4$$

Puisque $\mathbb{U}_4 = \{i^k, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[z^4 = 1 + i] \iff [\exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = i^k 2^{1/8}e^{i\pi/16}]$

EXERCICE 10. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) \quad z^4 - z^2 - 2 = 0$

Via le changement de variable $Z = z^2$, l'équation se réécrit : $Z^2 - Z - 2 = 0$. Les solutions de cette équation sont exactement 2 et -1 .

On en déduit que pour tout complexe z on a :

$$z^4 - z^2 - 2 = 0 \iff z^2 = 2 \quad \text{ou} \quad z^2 = -1$$

Conclusion. Soit z un complexe. On a : $[z^4 - z^2 - 2 = 0] \iff [z \in \{\pm\sqrt{2}, \pm i\}]$

EXERCICE 11. — Montrer que : $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1$

Selon le cours : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega = 0$. Autrement écrit : $\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} = 0$

En particulier : $\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} \right) = 0$. Donc : $\sum_{k=0}^4 \operatorname{Re} (e^{2ik\pi/5}) = 0$. Par suite : $\sum_{k=0}^4 \cos \left(\frac{2k\pi}{5} \right) = 0$

Explicitement à présent :

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$$

Conclusion. $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1$

EXERCICE 12. — Dédire de l'exercice précédent la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$. Comment peut-on en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$?

Selon l'exercice précédent : $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$

Or $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$.

Par ailleurs, selon la formule de duplication : $\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1$.

On déduit de tout ce qui précède que :

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

Ainsi le réel $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4X^2 + 2X - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont exactement

$$\frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Pour conclure, il reste à observer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est positif, puisque : $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

Conclusion. $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

On peut en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$ en utilisant la formule de duplication pour le cos, à l'instar de ce qui a été fait pour la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$, dans l'exercice 1 de la banque de la colle 2.

EXERCICE 13. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

Soit n un entier naturel ≥ 2 . Selon le cours : $\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in [0, n-1] \right\}$. Par suite :

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2in(n-1)\pi}{2n}\right) = \exp((n-1)i\pi) = (e^{i\pi})^{n-1}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$

EXERCICE 14. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = z^n$.

Soit n un entier naturel ≥ 2 , et soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$[z = z^n] \iff [z(z^{n-1} - 1) = 0] \iff [z = 0 \text{ ou } z^{n-1} = 1]$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[z = z^n] \iff [z \in \mathbb{U}_{n-1} \cup \{0\}]$

EXERCICE 15. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\bar{z} = z^n$.

Soit n un entier naturel ≥ 2 , et soit $z \in \mathbb{C}$. Observons que :

$$\bar{z} = z^n \implies |z| = |z|^n \implies |z| = 0 \text{ ou } |z| = 1$$

On distingue alors deux cas, suivant que z est nul ou pas.

➤ **Premier cas :** $z = 0$. Il est immédiat que $\bar{0} = 0^n$ (puisque n n'est pas nul).

➤ **Second cas :** $z \neq 0$. D'après ce qui précède, si z est un complexe non nul solution de l'équation, alors $|z| = 1$. Il s'ensuit que $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Par conséquent :

$$\bar{z} = z^n \iff \frac{1}{z} = z^n \iff z^{n+1} = 1 \iff z \in \mathbb{U}_{n+1}$$

➤ **Synthèse des deux cas.** Selon l'analyse précédente, on vient d'établir que pour tout complexe z on a l'implication :

$$[\bar{z} = z^n] \implies [z \in \mathbb{U}_{n+1} \cup \{0\}]$$

La preuve de l'implication réciproque est une vérification aisée qui permet de conclure.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[\bar{z} = z^n] \implies [z \in \mathbb{U}_{n+1} \cup \{0\}]$

EXERCICE 16. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $(z + i)^5 = (z - i)^5$

Soit z un nombre complexe distinct de i . On a :

$$(z + i)^5 = (z - i)^5$$

$$\iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^5 = 1$$

$$\iff \frac{z + i}{z - i} \in \mathbb{U}_5$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad \frac{z + i}{z - i} = \omega^k \quad (\text{en ayant noté } \omega = e^{2i\pi/5})$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad z + i = \omega^k (z - i)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad (1 + \omega^k) i = (\omega^k - 1) z$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} i$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{e^{2ik\pi/5} + 1}{e^{2ik\pi/5} - 1} i$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} i \quad (\text{technique de l'angle-moitié})$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[(z + i)^5 = (z - i)^5] \iff \left[\exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad z = \cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \right]$

EXERCICE 17. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 1)^n = (z - 1)^n$.

Soit z un nombre complexe distinct de 1. On a :

$$(z + 1)^n = (z - 1)^n$$

$$\iff \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^n = 1$$

$$\iff \frac{z + 1}{z - 1} \in \mathbb{U}_n$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \frac{z + 1}{z - 1} = \omega^k \quad (\text{en ayant noté } \omega = e^{2i\pi/n})$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad z + 1 = \omega^k (z - 1)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad 1 + \omega^k = (\omega^k - 1) z$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \quad z = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = \frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{e^{2ik\pi/n} - 1} \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad (\text{technique de l'angle-moitié}) \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $[(z+1)^n = (z-1)^n] \Longleftrightarrow \left[\exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right]$

EXERCICE 18. — Soit n un entier naturel ≥ 2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+iz)^n = (1-iz)^n$

Conclusion.

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 19. — **(EQUATION COMPLEXE).** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 + z^4 - 2 = 0$$

Via le changement de variable $Z = z^4$, l'équation se réécrit : $Z^2 + Z - 2 = 0 \Longleftrightarrow (Z-1)(Z+2) = 0$.

On en déduit que pour un nombre complexe z on a :

$$[z^8 + z^4 - 2 = 0] \Longleftrightarrow [z^4 = 1 \text{ ou } z^4 = -2]$$

Or : $z^4 = 1 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{U}_4 = \{i^k, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}$.

Et : $z^4 = -2 \Longleftrightarrow z^4 = 2e^{i\pi} \Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad z = 2^{1/4}e^{i\pi/4}i^k$

Conclusion. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $[z^8 + z^4 - 2 = 0] \Longleftrightarrow [z \in \mathbb{U}_4 \cup \{2^{1/4}e^{i\pi/4}i^k, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}]$

EXERCICE 20. — **(SYSTÈME)** Etablir qu'il existe exactement 8 couples (u, v) de nombres complexes, que l'on explicitera, tels que :

$$\begin{cases} u^2v = 2 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases}$$

On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe un couple de nombres complexes (u, v) tel que :

$$\begin{cases} u^2v = 2 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases}$$

Alors :
$$\begin{cases} u^4v^2 = 4 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases}$$

On en déduit que u^4 et v^2 sont solutions de l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$. Celle-ci a pour racines 1 et 4. On en déduit que $u^4 = 1$ et $v^2 = 4$, ou $u^4 = 4$ et $v^2 = 1$.

Ainsi, pour un couple (u, v) de complexes, on a prouvé l'implication :

$$\begin{cases} u^2v = 2 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, u = i^k \text{ et } v = \pm 2 \\ \text{ou} \\ \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, u = i^k \sqrt{2} \text{ et } v = \pm 1 \end{cases}$$

Réciproquement, tout couple de la forme ci-dessus n'est pas solution du système initial. En effet, la condition $u^2v = 2$ permet d'éliminer un couple sur deux, et de ne conserver que les 8 couples vérifiant cette équation, explicitement :

$$(1, 2), (-1, 2), (i, -2), (-i, -2), (\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1), (i\sqrt{2}, -1), (-i\sqrt{2}, -1).$$

EXERCICE 21. — (EQUATION COMPLEXE).

1/ Déterminer les racines quatrièmes de 16 dans $\mathbb{C}$.

2 est une racine quatrième de 16 dans $\mathbb{C}$. Les 4 racines quatrièmes de 16 dans $\mathbb{C}$ sont donc : $2, 2i, -2$ et $-2i$.

Il revient au même de dire que l'ensemble des racines quatrièmes de 16 est : $\{2i^k / k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1 + z)^4 = 16(1 - z)^4$.

On montrera en particulier que (E) possède une solution dans $\mathbb{Z}$, une solution dans $\mathbb{Q}$, et deux solutions complexes conjuguées.

Soit z un nombre complexe. En observant que 1 n'est pas solution de l'équation (E) , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} & [z \text{ est solution de } (E)] \\ \iff & \frac{(1+z)^4}{(1-z)^4} = 16 \\ \iff & \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^4 = 16 \\ \iff & \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \frac{1+z}{1-z} = 2i^k \\ \iff & \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, 1+z = 2i^k(1-z) \\ \iff & \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z(2i^k + 1) = 2i^k - 1 \\ \iff & \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = \frac{2i^k - 1}{2i^k + 1} \\ \iff & \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = \frac{4(-1)^k - 4i^k + 1}{4(-1)^k - 1} \end{aligned}$$

Notons $Z_k = \frac{4(-1)^k - 4i^k + 1}{4(-1)^k - 1}$. On a : $Z_0 = \frac{1}{3}$; $Z_1 = \frac{3+4i}{5}$; $Z_2 = 3$ et $Z_3 = \frac{3-4i}{5}$.

Conclusion. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$[(1+z)^4 = 16(1-z)^4] \iff \left[z \in \left\{ \frac{1}{3}; 3; \frac{3+4i}{5}; \frac{3-4i}{5} \right\} \right]$$

EXERCICE 22. — Soit α un réel non multiple de π . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 2 \cos(\alpha)$$

Conclusion.

EXERCICE 23. — (A LA RECHERCHE DE $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$).

Dans cet exercice, on pose :

$$\omega = e^{2i\pi/7}, \quad A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

1/ Etablir que : $A + B = -1$.

$$\text{D'après le cours : } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 \iff 1 + A + B = 0 \iff A + B = -1$$

CONCLUSION. $A + B = -1$

2/ Etablir que :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$$

$$\text{On a : } \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \text{ (puisque } \frac{8\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7} \text{)}$$

$$\text{D'où : } \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

Or $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ puisque $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$, et que la fonction $\sin$ est strictement décroissante sur $[\pi/2, \pi]$.

$$\text{Il s'ensuit que : } \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) > 0$$

$$\text{CONCLUSION. } \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$$

3/ Calculer AB .

$$\begin{aligned} \text{On a : } AB &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 = 2 + \underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}_{=0} \end{aligned}$$

CONCLUSION. $AB = 2$

4/ Etablir que : $\text{Im}(A) > 0$.

$$\text{Notons que : } \Im(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

Le réel $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est positif car $\frac{2\pi}{7}$ est dans $[0, \pi]$.

Et le réel $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ est strictement positif d'après la question 6.

CONCLUSION. $\text{Im}(A) > 0$

5/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B .

D'après ce qui précède, les complexes A et B satisfont le système $\begin{cases} A + B = -1 \\ AB = 2 \end{cases}$.

A ce titre, ils sont solutions de l'équation $X^2 + X + 2 = 0$. Or cette dernière équation possède évidemment deux racines complexes conjuguées : $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

On déduit alors de la question précédente que : $A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

CONCLUSION. $A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

6/ En déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Corollaire immédiat de la question précédente.