

Chapitre 4-bis : Complexes, le retour !

1 – Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Définition : Une **racine carrée** d'un complexe z est un complexe ω tque $\omega^2 = z$.

Théorème : tout complexe z non nul possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: $\pm |z|^{1/2} e^{i \arg(z)/2}$ (et 0 ne possède qu'une seule racine carrée : 0).

Recherche des racines carrées d'un complexe $z \neq 0$: en utilisant la forme exponentielle de z , ou les formes algébriques. Dans cette dernière situation, on utilise le fait que $\omega = a + ib$ (a et b réels) est une racine carrée de z SSI : $a^2 - b^2 = \operatorname{Re}(z)$, $2ab = \operatorname{Im}(z)$ et $a^2 + b^2 = |z|$.

2 – Equations du 2nd degré à coeffs complexes

Théorème (équations du second degré à coeffs complexes) : soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$. On note (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Si $\Delta = 0$: (E) possède une unique solution : $-b/2a$. Si $\Delta \neq 0$: (E) possède exactement 2 solutions : $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ .

Relations coefficients-racines : avec les notations du théorème, lorsque (E) possède deux racines z_1 et z_2 , on a : $z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1 z_2 = c/a$.

“Dans l'autre sens”, si z_1 et z_2 sont deux complexes, ils sont racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ (où l'on a noté P et S les produit et somme de z_1 et z_2).

3 – Racines n -ièmes de l'unité

Racines n -ièmes de l'unité : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une **racine n -ième de l'unité** est un nombre complexe ω tque $\omega^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Propriété : $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$; $1 \in \mathbb{U}_n$; $\mathbb{U}_n$ est stable par produit et passage à l'inverse (ou par conjugaison, c'est la même chose...).

Théorème : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, ou $\mathbb{U}_n = \{w^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ en ayant posé $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exemples : les racines 4-ièmes de l'unité sont $\pm 1, \pm i$ (ou i^k avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$). Les racines cubiques de l'unité sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \bar{j}$ (ou j^k avec $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$).

Interprétation géométrique : les racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Propriété : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ (la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle).

4 – Racines n -ièmes d'un complexe, et applications

Utilisation des racines n -ièmes de l'unité pour déterminer les racines n -ièmes d'un complexe non-nul, ou pour la résolution de certaines équations (par ex : $(1 + iz)^n = (1 - iz)^n$).

Chapitre 6 : Applications

1 – Définitions et premiers exemples

Définition (“naïve”). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est un procédé qui permet d'associer à tout élément x de l'ensemble E un unique élément noté $f(x)$ de l'ensemble F , appelé **image** de x par f .

Définition (“la vraie”). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est une partie Γ_f de $E \times F$ telle que : $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f$. Ainsi, pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que le couple (x, y) appartienne à Γ_f est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f .

Exemples : les fonctions usuelles sont des applications (en général d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; le fait d'associer à une fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sa dérivée $f' \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ définit une application *etc.*...

Remarque : une application n'est pas “qu'une formule”. C'est la donnée d'un nom, d'un ensemble de définition, d'un ensemble d'arrivée, et de la description du procédé qui à un élément de l'ensemble de définition associe son image.

Notation. $f : E \longrightarrow F$ ou $f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$
 $x \longmapsto f(x)$

Notation. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Définition. Soit E un ensemble. L'**identité** de E est l'application qui à tout élément x de E associe x . Elle est notée id_E .

Définition. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La **composée** de f et g est l'application (notée $g \circ f$) de E dans G définie en posant : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque : la composition des applications **n'est pas commutative**. En revanche, elle est associative :

Propriété. Soient E, F, G et H quatre ensembles, et $f \in F^E, g \in G^F, h \in H^G$ trois applications. On a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propriété. Pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on a $f \circ \text{id}_E = f$ et $\text{id}_F \circ f = f$ (l'identité est l'élément neutre pour la composition des applications).

2 – Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F . On dit que f est **injective** (*resp.* **surjective**, **bijective**) si tout élément de F admet au plus un (*resp.* au moins un, *resp.* exactement un) antécédent par f dans E .

Traduction à l'aide de quantificateurs : soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$[f \text{ injective}] \iff [\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x']$$

$$[f \text{ surjective}] \iff [\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)]$$

$$[f \text{ bijective}] \iff [\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)]$$

Propriété. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont injectives (*resp.* surjectives, *resp.* bijectives), alors la composée $g \circ f$ est injective (*resp.* surjective, *resp.* bijective).

3 – Bijections réciproques

Théorème. Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \text{id}_F \text{ et } g \circ f = \text{id}_E.$$

Propriété, définition et notation. Lorsque f est bijective, l'application g du théorème ci-dessus est **unique**, appelée **bijection réciproque** de f , notée f^{-1} .

Propriétés des bijections réciproques. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

► Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

► Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition. Soit E un ensemble. Une **involution** de E est une application f de E dans E telle que : $f \circ f = \text{id}_E$.

Propriété. Soit E un ensemble. Toute involution de E est bijective, et est sa propre bijection réciproque.

4 – Ensembles équipotents et dénombrables

Définition. Deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection entre E et F . On le note $E \sim F$.

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont équipotents puisque la fonction exponentielle induit une bijection du premier ensemble vers le second.

Propriété. La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Définition. Un ensemble E est **dénombrable** si E et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exemples : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables ; $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

QUESTIONS DE COURS

► **Propriété.** $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$

► **Propriété.** La composée de deux applications injectives est injective.

► **Propriété.** La composée de deux applications surjectives est surjective.

► **Propriété.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $(g \circ f)$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

► **Théorème** (implication 1). Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est bijective.

Les questions de la 2nde colonne sont sur le principe du volontariat

► **Théorème :** $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, ou $\mathbb{U}_n = \{w^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ en ayant noté $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

► **Théorème** (implication 2). Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si f est bijective alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

► **Propriété** (“unicité de la réciproque”). Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

► **Propriété.** Soit E un ensemble. Notons $\text{Bij}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E . Avec ces notations, $(\text{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.