

FICHE MÉTHODE : INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

INJECTIVITÉ

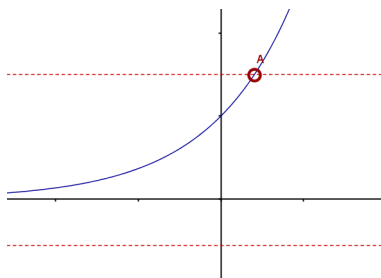
- **Définition** : f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E .
- **Définition alternative** : f est injective si deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f .
- **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ injective}] \iff [\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x']$$

ou :

$$[f \text{ injective}] \iff [\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')]$$

- **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au plus un point (0 ou 1 donc).



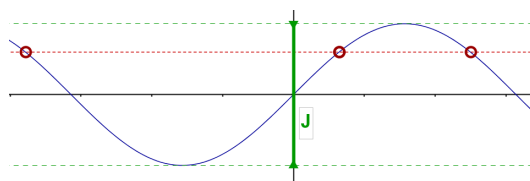
- **Méthode (pour prouver l'injectivité)** : on suppose $f(x) = f(x')$, et on essaye d'aboutir à $x = x'$.
- **Méthode (pour prouver la non injectivité)** : on trouve un contre-exemple, ie deux éléments distincts de E qui ont la même image par f .

SURJECTIVITÉ

- **Définition** : f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E .
- **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ surjective}] \iff [\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y]$$

- **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au moins un point (1 ou plusieurs donc).



- **Méthodes (pour prouver la surjectivité)** : on prend $y \in F$ arbitraire, et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution.
- **Méthode (pour prouver la non surjectivité)** : on trouve un contre-exemple, ie un élément de F qui n'a aucun antécédent par f dans E .

BIJECTIVITÉ

- **Définition** : f est **bijective** si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E .
- **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ bijective}] \iff [\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y]$$

- **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.
- **Méthodes (pour prouver la bijectivité)** : voici une liste non-exhaustive de stratégies pour établir la bijectivité d'une application $f : E \longrightarrow F$.
 - on montre que f est injective et surjective.
 - on prend $y \in F$ arbitraire, et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution.
 - on construit une application $g : F \longrightarrow E$ qui vérifie $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.
 - avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle) une fonction continue, on montre que f est strictement monotone ; elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$.
 - avec $f : E \longrightarrow E$, on montre que f est une involution (cas très rare).
- **Méthode (pour prouver la non bijectivité)** : on montre que f est non injective ou non surjective, et on se ramène donc à l'un cas évoqués plus haut.