

MATHS - FORMULAIRE D'AUTOMNE

I - TRIGONOMETRIE

II - FONCTIONS À VALEURS RÉELLES

II.1 - GÉNÉRALITÉS

II.2 - FONCTIONS USUELLES

Valeur absolue

Fonction polynomiale de degré 2

Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Fonctions cosinus, sinus et tangente

Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Fonctions puissances

Fonctions exponentielles de base a

Fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente

II.3 - FORMULAIRE DES DÉRIVÉES

II.4 - FORMULAIRE DES DL À L'ORDRE 1 EN 0

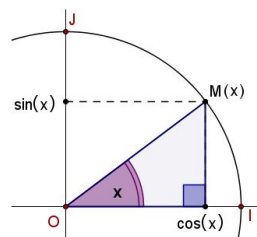
II.5 - FORMULAIRE DES PRIMITIVES

II.6 - FORMULAIRE DES DÉRIVÉES n -ÈMES

I - TRIGONOMÉTRIE

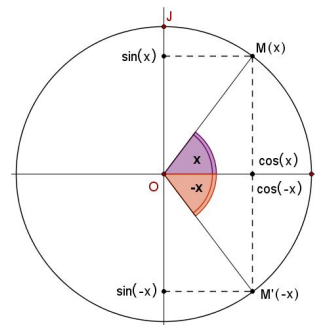
Note : les formules données sur cette page sont valables pour tout nombre réel x .

Relation fondamentale : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$



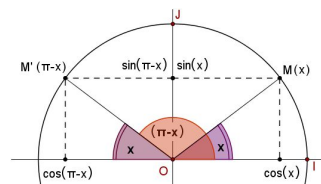
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



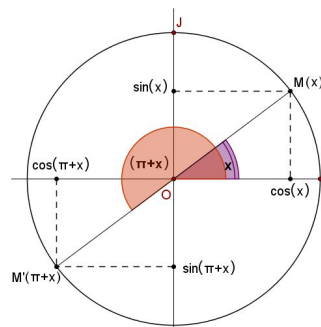
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$



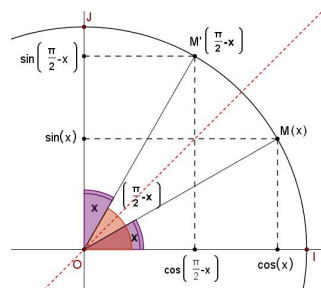
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$



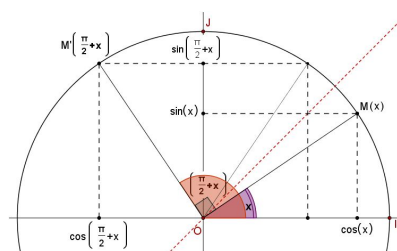
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$



Note : sur cette page, a, b, p et q désignent des réels... raisonnables ! (attention à l'ensemble de définition de $\tan$)

$$\text{Formules d'addition : } \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{cases}$$

$$\text{Formules "de soustraction" : } \begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases}$$

$$\text{Formules de duplication : } \begin{cases} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \end{cases}$$

$$\text{Formules de linéarisation : } \begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} & \text{d'où : } \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} & \text{d'où : } \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} & \text{d'où : } \sin(a)\cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{En posant } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) : \begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

II - FONCTIONS À VALEURS RÉELLES

II.1 GÉNÉRALITÉS, TERMINOLOGIE

1/ Une fonction f est **paire** si son ensemble de définition D est symétrique par rapport à zéro et si

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

2/ Une fonction f est **impaire** si son ensemble de définition D est symétrique par rapport à zéro et si

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x) \iff \forall x \in D, f(x) + f(-x) = 0$$

3/ Une fonction f réalise une **bijection** de D dans E si elle est définie sur D , et si tout élément de E admet un unique antécédent par f dans D :

$$\forall y \in E, \exists! x \in D, y = f(x)$$

4/ Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **T -périodique** si : $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$

Dans toutes les définitions ci-dessous, f désigne une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles. La fonction f est :

5/ **minorée sur** E si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq m$

6/ **majorée sur** E si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$

7/ **bornée sur** E si elle est minorée et majorée sur E .

8/ **croissante sur** E si : $\forall (x, y) \in E^2, [x \leq y] \implies [f(x) \leq f(y)]$

9/ **décroissante sur** E si : $\forall (x, y) \in E^2, [x \leq y] \implies [f(x) \geq f(y)]$

10/ **monotone sur** E si elle est croissante ou décroissante sur E .

11/ f admet un **maximum** en a , ou que $f(a)$ est le **maximum de f sur E** si :

$$\forall x \in E, f(x) \leq f(a)$$

12/ f admet un **minimum** en a , ou que $f(a)$ est le **minimum de f sur E** si :

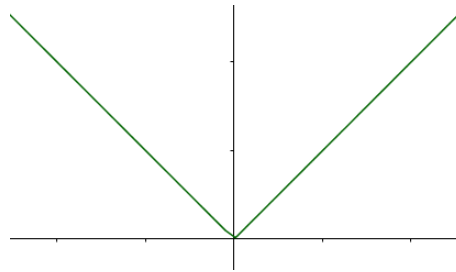
$$\forall x \in E, f(x) \geq f(a)$$

13/ f admet un **extremum** en a , ou que $f(a)$ est un **extremum de f sur E** si $f(a)$ est le minimum ou le maximum de f sur E .

II.2 FONCTIONS USUELLES

LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

- **Dérivabilité** : la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas dérivable en 0
- **Continuité** : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
- **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
- **Parité** : la fonction $x \mapsto |x|$ est paire



LES FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 2

- **Hypothèse** : (a, b, c) triplet de réels avec $a \neq 0$
- **Définition** : pour tout réel x , $P_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$
- **Dérivabilité** : la fonction $P_{a,b,c}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
- **Sens de variation.**
 - Si $a > 0$: strictement décroissante sur $] -\infty, -b/2a[$, strictement croissante sur $] -b/2a, +\infty[$
 - Si $a < 0$: strictement croissante sur $] -\infty, -b/2a[$, strictement décroissante sur $] -b/2a, +\infty[$
- **Discriminant.** $\Delta = b^2 - 4ac$
- **Signe de $P_{a,b,c}$.**

Si $\Delta > 0$: $P_{a,b,c}$ possède exactement 2 racines réelles $x_{+,-} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; la fonction $P_{a,b,c}$ est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé à a entre les racines

Si $\Delta \leq 0$: $P_{a,b,c}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, le signe de a

- **Limites aux bornes.**

$$\text{si } a > 0 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{a,b,c}(x) = +\infty \quad \text{si } a < 0 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{a,b,c}(x) = -\infty$$

- **Convexité.** $P_{a,b,c}$ est convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$

FONCTIONS LOGARITHME NÉPÉRIEN ET EXPONENTIELLE
LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

- **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}_+^*$
- **Dérivabilité** : la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

- **Sens de variation** : strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \ln x = -\infty$$

(asymptote verticale d'équation $x = 0$).

- **Tableau de variation** :

x	0	$+\infty$
$\ln x$		
	$-\infty$	$+\infty$

- La fonction $\ln$ est une **bijection** de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- **Convexité**. $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

Dans un repère orthonormé du plan, les courbes représentatives de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Cas particulier – Logarithme de base a . Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction **logarithme de base a** et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

LA FONCTION EXPONENTIELLE

- **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$
- **Dérivabilité** : la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e'(x) = e^x$$

- **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Limites aux bornes** :

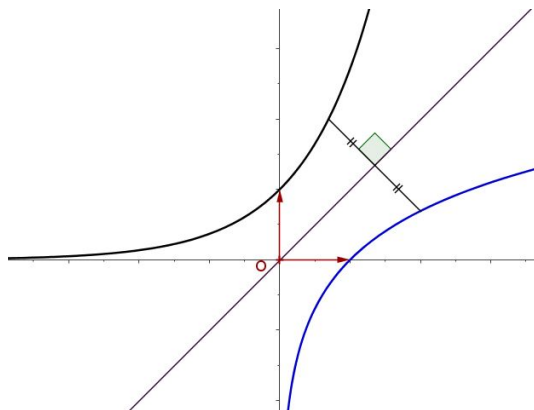
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

(asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

- **Tableau de variation** :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x		
	0	$+\infty$

- La fonction $\exp$ induit une **bijection** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x \times e^y$
- **Convexité**. $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$



FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

LA FONCTION COSINUS

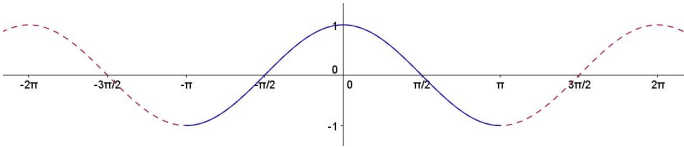
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- Dérivabilité : la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos' x = -\sin x$

- Tableau de variation :

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x$		0	
	$+$		$-$
$\cos$	-1	1	-1

- Courbe représentative :



- Convexité : convexe sur $[-\pi/2, \pi/2]$, concave sur $[\pi/2, 3\pi/2]$
- Bijection : cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$

LA FONCTION SINUS

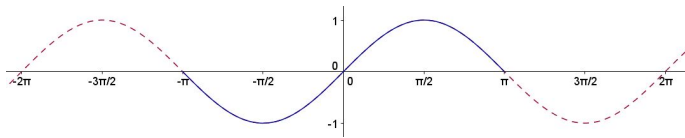
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- Dérivabilité : la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin' x = \cos x$

- Tableau de variation :

x	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	π
$\sin' x$		0	0	
	$-$	$+$	$-$	
$\sin$	0	-1	1	0

- Courbe représentative :



- Convexité : concave sur $[0, \pi]$, convexe sur $[-\pi, \pi]$
- Bijection : sin bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

LA FONCTION TANGENTE

► **Ensemble de définition** : $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

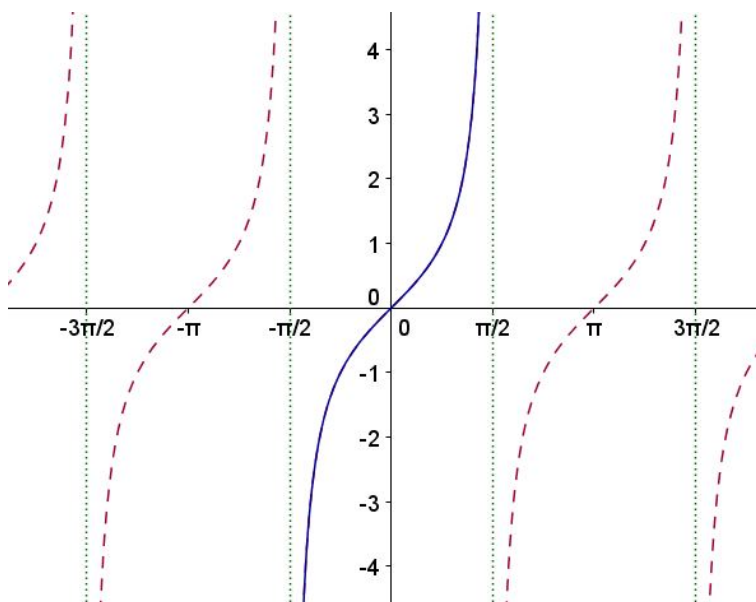
► **Dérivabilité** : la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

► **Tableau de variation** :

x	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\tan' x$		+
$\tan x$	$-\infty$	$+\infty$

► **Courbe représentative** :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur $] -\pi/2; \pi/2[$ puis d'appliquer des translations de vecteur $k\pi \vec{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

► **Convexité** : convexe sur $[0, \pi/2[$, concave sur $] -\pi/2, 0]$

► **Bijection** : $\tan$ bijective de $] -\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

LA FONCTION COSINUS HYPERBOLIQUE

La fonction ch est **définie** sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$
- **Parité** : ch est paire
- **Dérivabilité** : ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$
- **Sens de variation** : strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- **Limites aux bornes** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, et (par parité) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$
- **Convexité** : ch est convexe sur $\mathbb{R}$
- **Bijection** : ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$

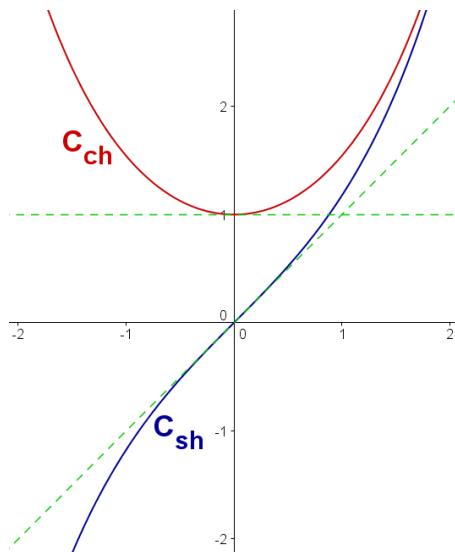
LA FONCTION SINUS HYPERBOLIQUE

La fonction sh est **définie** sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$		$+$	
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

- **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$
- **Parité** : sh est impaire
- **Dérivabilité** : sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$
- **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Limites aux bornes** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$
- **Convexité** : sh est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$
- **Bijection** : sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



FORMULE CLEF — $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln(a)}$

LES FONCTIONS PUISSANCES

DÉFINITION. Soit a un réel (quelconque). On appelle fonction **puissance d'exposant a** et nous noterons P_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$$

Etude de $x \mapsto x^a$ ($a > 0$)

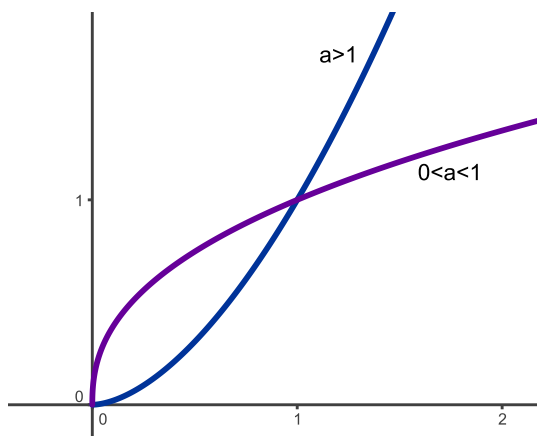
- **Sens de variation** : strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$$

- **Tableau de variation** :

x	0	$+\infty$
$P'_a(x)$	0	$+$
x^a	0	$+\infty$

- **Exemples de courbes représentatives** :



Etude de $x \mapsto x^a$ ($a < 0$)

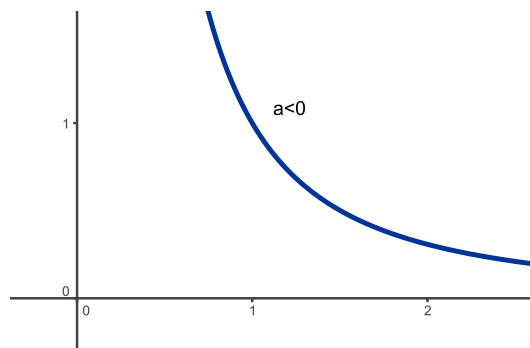
- **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$$

- **Tableau de variation** :

x	0	$+\infty$
$P'_a(x)$	0	$-$
x^a	$+\infty$	0

- **Exemple de courbe représentative** :



LES FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

DÉFINITION. Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction **exponentielle de base a** et on note $\exp_a$ fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x \ln a}$$

Remarque — En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x > 0$.

► **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

► **Dérivabilité** : dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp_a)'(x) = (\ln a) \times a^x$

► **Convexité** : convexe sur $\mathbb{R}$

Etude de $x \mapsto a^x$ ($0 < a < 1$)

► **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}$.

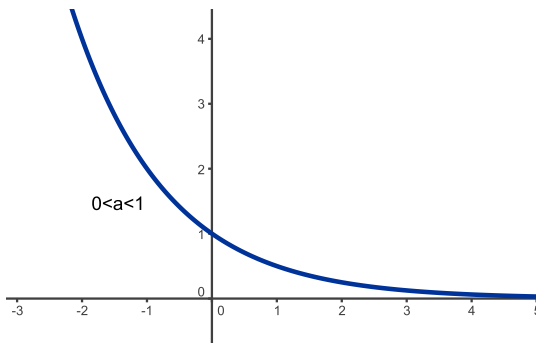
► **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

► **Tableau de variation** :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp_a)'$		
a^x	$+\infty$	0

► **Exemple de courbe représentative** :



Etude de $x \mapsto a^x$ ($a > 1$)

► **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

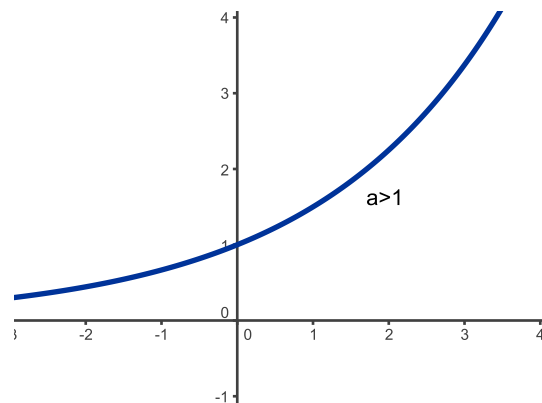
► **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

► **Tableau de variation** :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp_a)'$		
a^x	0	$+\infty$

► **Exemple de courbe représentative** :



Pour tout réel a (strictement positif et $\neq 1$), la fonction exponentielle de base a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, et “transforme les sommes en produits”.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

LA FONCTION ARCCOSINUS

$\arccos$ est **définie** sur $[-1; 1]$ par : $\arccos : [-1; 1] \longrightarrow [0; \pi]$ (où y : unique solution dans $[0; \pi]$ de $\cos(y) = x$).

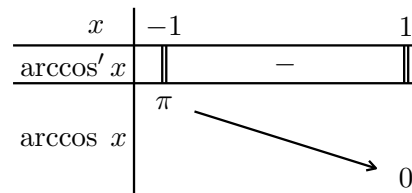
$$x \longmapsto y$$

La fonction $\arccos$ est **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $] -1; 1 [$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1 .

De plus : $\forall x \in] -1; 1 [$, $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\arccos}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{\pi}{2} - x$, et $\mathcal{C}_{\arccos}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[-1; 0]$ (*resp.* sur $[0; 1]$).



LA FONCTION ARCSINUS

$\arcsin$ est **définie** sur $[-1; 1]$ par : $\arcsin : [-1; 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (où y : unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de $\sin(y) = x$).

$$x \longmapsto y$$

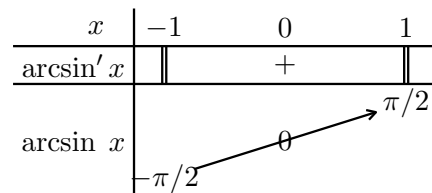
x).

La fonction $\arcsin$ est **impair**, **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $] -1; 1 [$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1 .

De plus : $\forall x \in] -1; 1 [$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $\arcsin$ est strictement croissante sur $[-1; 1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\arcsin}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathcal{C}_{\arcsin}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[0; 1]$ (*resp.* sur $[-1; 0]$).



LA FONCTION ARCTANGENTE

$\arctan$ est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ (où y : unique solution dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ de $\tan(y) = x$).

$$x \longmapsto y$$

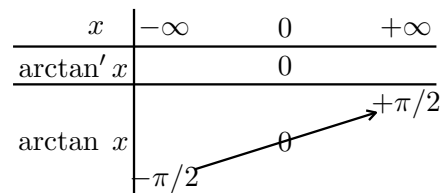
La fonction $\arctan$ est **impair**, **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.

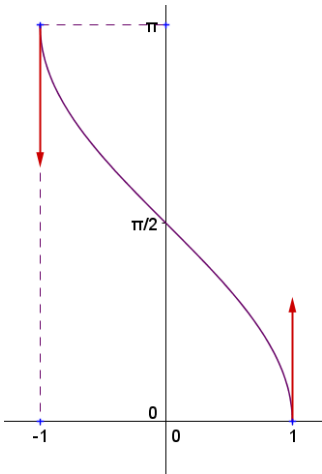
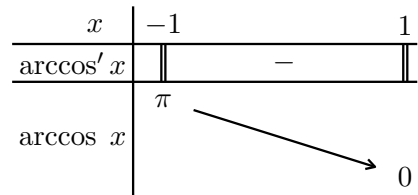
La fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus elle est **bornée**.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\arctan}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathcal{C}_{\arctan}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $\mathbb{R}_-$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_+$).

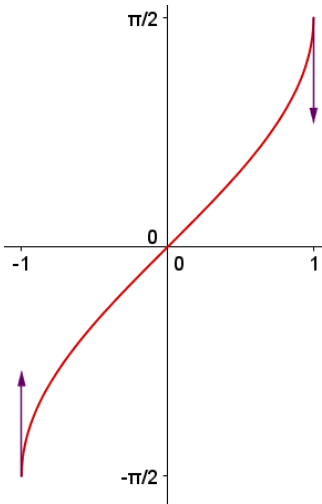
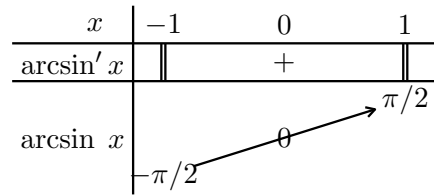
La courbe $\mathcal{C}_{\arctan}$ admet au voisinage de $+\infty$ (*resp.* de $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = \pi/2$ (*resp.* $y = -\pi/2$).



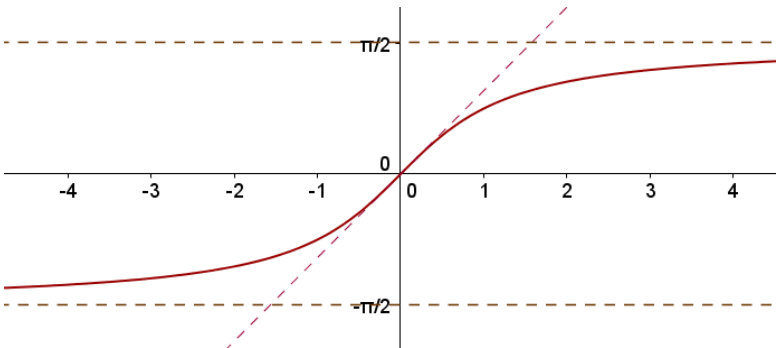
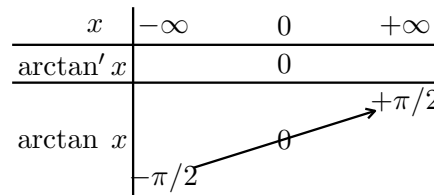
ARCCOSINUS (ARCCOS)



ARCSINUS (ARCSIN)



ARCTANGENTE (ARCTAN)



II.3 FORMULAIRE DES DÉRIVÉES

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$(v \circ u)(x)$	$v'(u(x)) \times u'(x)$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
$u^\alpha(x) \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)$
$u^2(x)$	$2u(x)u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\operatorname{ch}(u(x))$	$u'(x)\operatorname{sh}(u(x))$
$\operatorname{sh}(u(x))$	$u'(x)\operatorname{ch}(u(x))$
$\arccos(u(x))$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

II.4 FORMULAIRE DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS À L'ORDRE 1 USUELS

THÉORÈME : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Ainsi, lorsque f est dérivable en a , on a :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$$

1/ $e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)$

2/ $\sin(h) = h + h\varepsilon(h)$

3/ $\tan(h) = h + h\varepsilon(h)$

4/ $\operatorname{sh}(h) = h + h\varepsilon(h)$

5/ $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$

6/ $\cos(h) = 1 + h\varepsilon(h)$

7/ $\operatorname{ch}(h) = 1 + h\varepsilon(h)$

8/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+h)^n = 1 + nh + h\varepsilon(h)$$

9/ Et même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h)$$

10/ En particulier, pour $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)$$

11/ En particulier (bis), pour $\alpha = -1$,

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h\varepsilon(h)$$

12/ $\frac{1}{1-h} = 1 + h + h\varepsilon(h)$

13/ $\arccos(h) = \frac{\pi}{2} - h + h\varepsilon(h)$

14/ $\arcsin(h) = h + h\varepsilon(h)$

15/ $\arctan(h) = h + h\varepsilon(h)$

► Conséquences

1/ $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

(avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$)

2/ $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

3/ $\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

4/ $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

5/ $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

6/ Etc...

II.5 FORMULAIRE DES PRIMITIVES

Fonction f	Primitives F
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{x^n} \ (n \neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$e^x + c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + c$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + c$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + c$

Fonction f	Primitives F
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$u'(x) u(x)$	$\frac{1}{2} u^2(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$
$u'(x) u^\alpha(x)$	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(x) + c$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x)) + c$
$u'(x) \operatorname{ch}(u(x))$	$\operatorname{sh}(u(x)) + c$
$u'(x) \operatorname{sh}(u(x))$	$\operatorname{ch}(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\arcsin(u(x)) + c$
$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\arccos(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x)) + c$

II.6 FORMULAIRE DES DÉRIVÉES n -ÈMES

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$a^n e^{ax+b}$
$\cos(x)$	$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin(x)$	$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ch}(x)$	$\frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2} = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\frac{e^x + (-1)^{n+1} e^{-x}}{2} = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$
$\ln(x)$	$(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}^*)$
$x^N \quad (N \in \mathbb{N})$	$\begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n} & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$
$f(ax+b)$	$a^n f^{(n)}(ax+b)$

A SUIVRE !!!