

CORRIGÉ DU DS N°2 DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DU COURS)

Les trois questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ En calculant son module et son argument, établir que le nombre complexe

$$z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{24}$$

est un réel positif.

$$\text{On a : } \left(\sqrt{3} + i\right)^{24} = \left(2e^{i\pi/6}\right)^{24} = 2^{24}e^{24i\pi/6} = 2^{24}e^{4i\pi} = 2^{24} \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{CONCLUSION. } \left(\sqrt{3} + i\right)^{24} \in \mathbb{R}_+$$

2/ L'inégalité triangulaire, énoncée et démontrée en cours dans le cadre des nombres complexes, assure que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Ce résultat pourra au besoin être utilisé sans démonstration dans cette question.

Démontrer par récurrence l'inégalité triangulaire généralisée, c'est-à-dire établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

► **Initialisation.** L'assertion $P(2)$ est vraie selon la propriété de cours rappelée dans l'énoncé.

► **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n \geq 2$, et soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

D'après l'inégalité triangulaire du cours ($|z + z'| \leq |z| + |z'|$), on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| \quad \text{d'où : } \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

En résumé : $\forall (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. $P(n+1)$ est donc vraie.

$$\text{CONCLUSION. } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos(2x) + \cos(6x) = 0$$

Une des 36 méthodes pour résoudre cette équation. Soit x un réel. On a :

$$[\cos(2x) + \cos(6x) = 0] \iff [2 \cos(4x) \cos(2x) = 0]$$

$$\iff [\cos(4x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = 0] \iff \left[4x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \right]$$

CONCLUSION. Soit x un réel. On a :

$$[\cos(2x) + \cos(6x) = 0] \iff \left[x \equiv \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{4} \right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right] \right]$$

– PROBLÈME 1 - INTRODUCTION AUX POLYNÔMES DE BERNSTEIN –

Partie 1 - Questions préliminaires

1/ Soient n et p deux entiers naturels. Rappeler la formule donnant $\binom{n}{p}$ (on distinguera bien évidemment deux cas suivant que p appartient à $\llbracket 0, n \rrbracket$ ou non).

Selon le cours : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ On a :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

3/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = nx$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x on a :

$$\sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = \sum_{k=1}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(pour $k=0$, le terme de la somme est nul)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = \sum_{k=1}^n \left[n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(selon la question précédente)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n \sum_{k=1}^n \left[\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(par linéarité de la somme)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} \right]$$

(par changement d'indice)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = nx \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \right]$$

(par linéarité de la somme)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = nx (x + (1-x))^{n-1}$$

(selon le binôme de Newton)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = nx$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = nx$

Partie 2 - Polynômes de Bernstein associés à la fonction carrée

Pour tout entier naturel n , on définit une fonction P_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

Jusqu'à la fin de cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4/ Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$

5/ En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \left[k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)x^2$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left[k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] &= \sum_{k=2}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &\quad (\text{pour } k=0 \text{ et } k=1, \text{ les termes de la somme sont nuls}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] &= \sum_{k=2}^n \left[n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &\quad (\text{selon la question précédente}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \left[\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &\quad (\text{par linéarité de la somme}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[\binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} \right] \\ &\quad (\text{par changement d'indice}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left[\binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} \right]$$

(par linéarité de la somme)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)x^2 (x + (1-x))^{n-2}$$

(selon le binôme de Newton)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)x^2$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \left[k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)x^2$

6/ En observant que $k^2 = k(k-1) + k$ pour tout entier k , déduire de qui précède que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Soit x un réel. On a :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(selon l'énoncé)

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \left[k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(par linéarité de la somme)

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \left[(k(k-1) + k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(astuce diabolique donnée dans l'énoncé)

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^n \left[k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] + \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \right)$$

(par linéarité de la somme)

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{1}{n^2} (n(n-1)x^2 + nx)$$

(selon les questions 3 et 5)

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{1}{n^2} (n^2 x^2 - nx^2 + nx)$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$

Partie 3 - Polynômes de Bernstein associés à la fonction cube

Pour tout entier naturel n , on définit une fonction Q_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^3}{n^3} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

Jusqu'à la fin de cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

7/ A l'aide de la méthode d'identification, établir qu'il existe trois réels a , b et c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = ak(k-1)(k-2) + bk(k-1) + ck$$

Soient a , b et c trois réels. Pour tout entier naturel k , on a :

$$\begin{aligned} ak(k-1)(k-2) + bk(k-1) + ck &= a(k^3 - 3k^2 + 2k) + b(k^2 - k) + ck \\ &= ak^3 + (-3a + b)k^2 + (2a - b + c)k \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = ak(k-1)(k-2) + bk(k-1) + ck \iff \begin{cases} a = 1 \\ -3a + b = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{CONCLUSION. } \forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$$

8/ On admet que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \left[k(k-1)(k-2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = n(n-1)(n-2)x^3$$

Etablir alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_n(x) = x^3 + \frac{2-3n}{n^2} x^3 + \frac{n-1}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x$$

Soit x un réel. On a :

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^3}{n^3} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(selon l'énoncé)

$$\iff Q_n(x) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n \left[k^3 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(par linéarité de la somme)

$$\iff Q_n(x) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n \left[(k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

(selon la question précédente)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Q_n(x) &= \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=0}^n \left[k(k-1)(k-2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \right. \\ &\quad \left. + 3 \sum_{k=0}^n \left[k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] + \sum_{k=0}^n \left[k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \right) \\ &\quad \text{(par linéarité de la somme)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Q_n(x) = \frac{1}{n^3} (n(n-1)(n-2)x^3 + 3n(n-1)x^2 + nx)$$

(selon l'indication de l'énoncé, et les questions 3 et 5)

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_n(x) = x^3 + \frac{2-3n}{n^2} x^3 + 3\frac{n-1}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x$

Partie 4 - Une question à conserver pour une longue soirée d'hiver *

9/ Soit x un réel, n un entier naturel non nul, et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^n \left[\left(\prod_{j=0}^{p-1} (k-j) \right) \times \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = \left[\prod_{j=0}^{p-1} (n-j) \right] \times x^p$$

*. Et totalement hors-barème évidemment.

– PROBLÈME 2 - TROIS MÉTHODES POUR LE CALCUL D'UNE INTÉGRALE –

Partie 1 - Calcul de I par linéarisation

1/ Rappeler la formule d'Euler donnant $\sin(x)$ pour tout réel x .

Selon le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2/ Linéariser $\sin^3(x)$ pour tout réel x , et établir ainsi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) = a \sin(x) + b \sin(3x)$$

où a et b sont deux rationnels à préciser.

Soit x un réel. Selon la question précédente et le binôme de Newton :

$$\sin^3(x) = \frac{-1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = \frac{-1}{8i} (2i \sin(3x) - 6i \sin(x))$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$

3/ A l'aide de la question précédente, calculer l'intégrale I .

D'après la question précédente :

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x) \right) dx = \frac{3}{4} [-\cos(x)]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(3x)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12}$$

CONCLUSION. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) dx = \frac{2}{3}$

Partie 2 - Un autre calcul de I

Rappel. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et soit n un entier naturel.

On rappelle que la formule donnant la dérivée de u^n est :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

4/ Pour tout réel x , on pose $f(x) = \cos^3(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

Selon le rappel de l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x)$$

5/ En utilisant une très célèbre formule de trigonométrie, établir que :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) - \sin(x) \cos^2(x) \, dx$$

On a :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \sin(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \, dx$$

CONCLUSION. $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) - \sin(x) \cos^2(x) \, dx$

6/ On pose $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^2(x) \, dx$.

Calculer les intégrales I_1 et I_2 .

En premier lieu : $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$

Par ailleurs, selon la question 4 :

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^2(x) \, dx = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

CONCLUSION. $I_1 = 1$ et $I_2 = \frac{1}{3}$

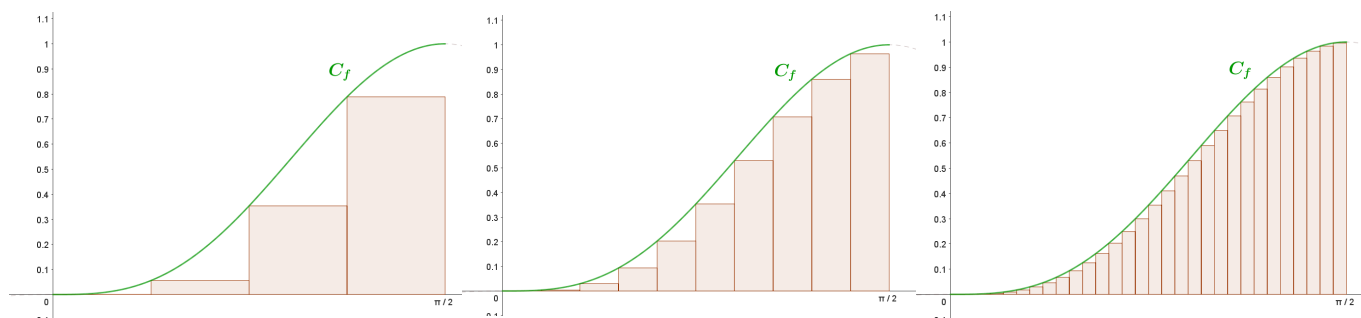
7/ Dédurre de ce qui précède la valeur de I .

D'après la question 5 et par linéarité de l'intégrale : $I = I_1 - I_2$.

On en déduit, avec la question 6 que : $I = 1 - \frac{1}{3}$. CONCLUSION. $I = \frac{2}{3}$

Partie 3 - Calcul de I par “sommes de rectangles”

On peut obtenir des valeurs approchées de l'intégrale I en approximant l'aire du domaine situé sous la courbe de f par une somme d'aires de rectangles. Le principe en est le suivant : on choisit un entier $n \geq 2$, on partage l'intervalle d'intégration ($[0, \pi/2]$ ici) en n petits intervalles de même longueur, et on approche f par une constante sur chacun de ces intervalles. Les graphes ci-dessous illustrent cette construction, avec $f = \sin^3$, et $n = 4$, $n = 10$ et $n = 25$ de la gauche vers la droite.



Il est assez intuitif que la somme des aires des rectangles (notée S_n pour un n donné) tend vers l'intégrale I lorsque n tend vers $+\infty$. Ce résultat, que nous prouverons cette année (pas besoin d'attendre la Spé pour celui-ci!), nous servira dans cette partie à re-trouver la valeur de I .

Explicitement à présent, on peut montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la somme S_n des aires des rectangles a pour expression :

$$S_n = \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) - \frac{\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{3k\pi}{2n}\right)$$

Dans ce contexte, l'intégrale I est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{soit} \quad I = \ell_1 - \ell_2$$

en ayant posé :

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{3k\pi}{2n}\right)$$

Le but des questions ci-dessous est de calculer ces deux limites, en commençant par calculer les sommes de sinus intervenant dans ces deux expressions.

8/ Calcul de ℓ_1 . Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/2n}$$

a/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$U_n = (1 - i) \times e^{-i\pi/4n} \times \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/2n} \\ \iff U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\pi/2n})^k \\ \iff U_n &= \frac{1 - (e^{i\pi/2n})^n}{1 - e^{i\pi/2n}} \quad (\text{somme géométrique de raison } e^{i\pi/2n} \neq 1) \\ \iff U_n &= \frac{1 - e^{i\pi/2}}{1 - e^{i\pi/2n}} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow U_n = \frac{1 - i}{e^{i\pi/4n} (e^{-i\pi/4n} - e^{i\pi/4n})}$$

($e^{i\pi/2} = i$, et technique de l'angle-moitié)

$$\Longleftrightarrow U_n = \frac{1 - i}{e^{i\pi/4n} \left(-2i \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right)}$$

CONCLUSION. $U_n = (1 - i) \times e^{-i\pi/4n} \times \frac{1}{-2i \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$

b/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Dédurre de la question précédente que :

$$U_n = (i + 1) \left(\cos \left(\frac{\pi}{4n} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right) \times \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Selon la question précédente :

$$U_n = (i + 1) \times e^{-i\pi/4n} \times \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$$

$$\Longleftrightarrow U_n = (i + 1) \left(\cos \left(\frac{\pi}{4n} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right) \times \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$$

CONCLUSION. $U_n = (i + 1) \left(\cos \left(\frac{\pi}{4n} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right) \times \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$

c/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Dédurre de la question précédente que :

$$\frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \left[\frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)} \right] - \frac{3\pi}{16n}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Par définition de U_n , on a :

$$\frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \frac{3\pi}{8n} \operatorname{Im} (U_n)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \frac{3\pi}{8n} \times \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4n} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} - \frac{3\pi}{16n} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$

CONCLUSION. $\frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left[\frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \right] - \frac{3\pi}{16n}$

d/ On rappelle que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$. Etablir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{3}{4}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Observons que :

$$\frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \times \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{4}$$

Observons à présent que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{4} = \frac{3}{4}$ (usuel)

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = 1 \text{ (selon le rappel fait dans l'énoncé)}$$

La conclusion s'ensuit, par produit de limites.

CONCLUSION. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{16n} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{3}{4}$

e/ Dédurre des questions c/ et d/ la valeur de

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

D'après les questions c/ et d/ : $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{3}{4}$

9/ **Calcul de ℓ_2 .** Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{3ik\pi/2n}$$

a/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$V_n = \frac{i(1+i)}{2} \times e^{-3i\pi/4n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{4n}\right)}$$

Calculs analogues à la question 8-a.

b/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Dédurre de ce qui précède que :

$$\operatorname{Im}(V_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4n}\right)} + 1 \right)$$

Calculs analogues aux question 8-b et 8-c.

c/ Dédurre de ce qui précède que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{3k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{12} \quad (\text{càd : } \ell_2 = \frac{1}{12})$$

Calculs analogues aux question 8-d et 8-e.

10/ A l'aide des questions 8-e/ et 9-c/, retrouver la valeur de l'intégrale I .

D'après les calculs précédents et la définition de S_n , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

CONCLUSION. Puisque $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ selon l'énoncé, on peut re-re-conclure : $I = \frac{2}{3}$