Colle 6 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Somme des racines n-èmes de l'unité**. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^k=\frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}}=\frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}}=0.\ \text{Ainsi : }\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0}$$

***Remarque 1**. Pour les amoureux du détail (je ne doute pas un instant que tous les MPSI le sont), la somme calculée ci-dessus est géométrique, de raison $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. La condition $n\geqslant 2$ assure que cette raison est différente de 1, et rend légitime l'utilisation de la formule "$\frac{1-q^n}{1-q}$" pour calculer la somme considérée.*

***Remarque 2**. Pour les amoureux de géométrie (je ne doute pas un instant que tous les MPSI le sont), la propriété ci-dessus signifie que l'origine du plan est le centre de gravité du polygone dont les sommets sont les racines n-èmes de l'unité.*

Question de cours n^{0}2 — **Propriété** : la composée de deux applications injectives est injective.

Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ deux applications. Supposons f et g injectives.

Soient x et x' deux éléments de E. Alors :

$$[(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')]\Longrightarrow[g(f(x))=g(f(x'))]\underbrace{\Longrightarrow}_{g\text{ injective}}[f(x)=f(x')]\underbrace{\Longrightarrow}_{f\text{ injective}}[x=x']$$

En résumé : $\forall(x,x')\in E^2,\ (g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')\Longrightarrow x=x'$. Ce qui signifie que $g\circ f$ est injective.

Conclusion : si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.

Question de cours n^{0}3 — **Propriété** : la composée de deux applications surjectives est surjective.

Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ deux applications. Supposons f et g surjectives.

Soit $z\in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists\, y\in F,\ g(y)=z$.

Et puisque f est surjective : $\exists\, x\in E,\ f(x)=y$.

En exploitant ces deux relations, on obtient : $g(f(x))=z$.

On a ainsi établi que : $\forall\, z\in G,\ \exists\, x\in E,\ (g\circ f)(x)=z$. Ce qui signifie que $g\circ f$ est surjective.

Conclusion : si f et g sont surjectives, alors $g\circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat des questions de cours 2 et 3. Si f et g sont bijectives, alors $g\circ f$ est bijective.

Question de cours n^{0}4 — **Propriété**. Soient $f\in F^E$ et $g\in G^F$.
Si f et g sont bijectives, alors $(g\circ f)$ est bijective et $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Supposons que $f\in F^E$ et $g\in G^F$ sont bijectives. Alors $(g\circ f)$ est bijective comme conséquence immédiate des 2 questions de cours précédentes.

En outre :

$$\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ\left(g^{-1}\circ g\right)\circ f=f^{-1}\circ(\mathrm{id}_F\circ f)=f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_E$$

en utilisant essentiellement l'associativité de la composition, le fait que l'identité est l'élément neutre pour la composition des applications, et la définition de bijection réciproque.

En résumé : $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f)=\mathrm{id}_E\quad(\spadesuit)$

De manière analogue, on vérifie sans peine que : $(g\circ f)\circ\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)=\mathrm{id}_F\quad(\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $(g\circ f)^{-1}=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)$

Question de cours n^{0}5 — **Théorème (implication 1)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.

[Il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$] $\Longrightarrow$ f est bijective

Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que : $f(x) = f(x')$. On a alors : $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$, on en déduit $x = x'$. Ce qui prouve que f est injective.

Soit y un élément de f. On a : $y = \mathrm{id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y admet un antécédent par f (qui est $g(y)$). Puisque y est un élément arbitraire de F dans ce petit raisonnement, on en déduit que f est surjective.

L'application f étant injective et surjective, elle est bijective.

Conclusion : s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective.

Question de cours n^{0}6 - Volontariat — **Théorème (implication 2)**. Soit $f \in F^E$. On a :

f est bijective $\Longrightarrow$ il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$

Supposons f bijective.

Puisque f est bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent dans E par f, que nous noterons x_y.

On définit alors une application $g : F \longrightarrow E$ en posant pour tout élément y de F : $g(y) = x_y$ (on associe à y son unique antécédent par f).

Vérifions que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Pour la première égalité : soit $y \in F$. Alors $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ (puisque x_y est l'unique antécédent de y par f). Ainsi : $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Passons à la seconde égalité : soit $x \in F$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ (puisque, f étant bijective, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f). Ainsi : $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Conclusion : si f est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Synthèse des questions de cours 5 et 6.

L'application f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \text{ \textbf{et} } g \circ f = \mathrm{id}_E$$

Question de cours n^{0}7 - Volontariat — **Propriété ("unicité de la réciproque")**. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.*

Montrons son unicité. A cette fin, supposons qu'il existe g_1 et $g_2 \in E^F$ telles que $f \circ g_1 = \mathrm{id}_F = f \circ g_2$ et $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E = g_2 \circ f$. Alors :

$$\begin{aligned} & (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) && \textit{(associativité de la composition)} \\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{id}_E \circ g_2 = g_1 \circ \mathrm{id}_F && \textit{(par hypothèse)} \\ \Longleftrightarrow\ & g_2 = g_1 && \textit{("l'identité est le neutre pour la composition")} \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'unicité de g.

Conclusion. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$

---

*. Selon la question de cours 3.

QUESTION DE COURS N^{0}8 - VOLONTARIAT — **Théorème (description de $\mathbb{U}_n$).**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \text{ on a :} \qquad \mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$ †

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit z une racine n-ième de l'unité. Par définition, on a alors : $z^n = 1$. Cette condition impliquant la non-nullité de z, on peut écrire z sous forme exponentielle : $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (avec $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$).

Ceci posé : $[z^n = 1] \iff |z|^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^n & = & 1 \\ n\theta & = & 0\ [2\pi] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ \theta & = & 0\ [2\pi/n] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |z| = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2k\pi/n \end{array} \right.$

En résumé : $[z^n = 1] \iff \left[\exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\right]$. On a ainsi établi que : $\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\}\ (\spadesuit)}$.

Reste à justifier que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, et contient n éléments. Pour cela, on **admet** provisoirement ‡ le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème (division euclidienne dans $\mathbb{Z}$). $\forall\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \exists!\,(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} a = bq + r \\ r \in [\![0, b-1]\!] \end{array} \right.$

Posons : $\boxed{E = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}\ (\heartsuit)}$. Etablir le théorème, c'est établir l'égalité : $E = \mathbb{U}_n$. Pour ce faire, on peut procéder par double inclusion.

➤ Montrons $E \subset \mathbb{U}_n$. Il résulte clairement des descriptions respectives de E ($\heartsuit$) et de $\mathbb{U}_n$ ($\spadesuit$) que tout élément de E appartient à $\mathbb{U}_n$, § donc $E \subset \mathbb{U}_n$.

➤ Montrons $\mathbb{U}_n \subset E$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. D'après ($\spadesuit$), il existe un entier relatif k tel que : $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On effectue alors la division euclidienne de k par n. D'après le théorème du même nom :

$$\exists!\,(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} k = nq + r \\ r \in [\![0, n-1]\!] \end{array} \right.$$

Ainsi : $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2i(nq+r)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2inq\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{n}}\right)^q}_{=1} \times \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}$ d'où : $\boxed{z = \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}}$. Puisque $r \in [\![0, n-1]\!]$, cette dernière écriture signifie que $z \in E$. Ce qui prouve que $\mathbb{U}_n \subset E$.

D'après la règle de double inclusion, on peut affirmer que $E = \mathbb{U}_n$. Par suite : $\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}}$

QUESTION DE COURS N^{0}9 - VOLONTARIAT — **Propriété**. Soit E un ensemble. Notons $\mathrm{Bij}\,(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. Avec ces notations, $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

① La composition des applications est associative (propriété générale du cours).

② Si f et g sont dans $\mathrm{Bij}\,(E)$, alors $(g \circ f) \in \mathrm{Bij}\,(E)$, puisque la composée de deux bijections est encore une bijection (corollaire des questions de cours 2 et 3).

③ L'application id_E est une bijection de E dans E, car c'est une involution de E.

④ Si f est dans $\mathrm{Bij}\,(E)$, alors f est une bijection de E dans E, et admet une bijection réciproque qui est également une bijection de E dans E. Ainsi : $f^{-1} \in \mathrm{Bij}\,(E)$. Et il est connu que : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E = f \circ f^{-1}$.

Bilan. L'ensemble $\mathrm{Bij}\,(E)$ est stable par composition (selon ②) ; l'identité de E est l'élément neutre pour la composition dans $\mathrm{Bij}\,(E)$ (selon ③) ; et tout élément f de $\mathrm{Bij}\,(E)$ admet un inverse (sa bijection réciproque f^{-1}) pour la composition dans $\mathrm{Bij}\,(E)$ (selon ④). En outre, la composition est associative (selon ①).

Conclusion. Pour les 4 raisons évoquées ci-dessus, $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

†. On peut aussi noter : $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k\ ,\ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$ en ayant posé $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

‡. En attendant le chapitre d'arithmétique, en 2027.

§. Ceci repose sur l'observation puissante que tout entier compris entre 0 et $n-1$ est en particulier un entier relatif.

Banque d'exercices

Exercice 1. — (Application des racines 5-èmes de l'unité).
Déterminer la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 2. — (Une "pseudo-réciproque", 1). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
Montrer que : $[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$

Exercice 3. — (Une "pseudo-réciproque", 2). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
Montrer que : $[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$

Exercice 4. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y,\ 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

Exercice 5. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \mathrm{i})^5 = (z - \mathrm{i})^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Exercice 6. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $(1 + \mathrm{j})^{600}$.

Exercice 7. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe.
On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Exercice 8. — (Equation et binôme de Newton) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \mathrm{i})^5 = (z - \mathrm{i})^5$, en utilisant le binôme de Newton.

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — (Application des racines 5-èmes de l'unité).
Déterminer la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

Selon le cours : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega = 0$. Explicitement : $\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5} = 0$. En particulier : $\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}) = 0$. D'où : $\sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0$. D'où : $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (par une double application de la formule : $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$).

Ainsi : $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

On a donc : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$) pour conclure que : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}}$

Exercice 2. — (Une "pseudo-réciproque", 1). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$$

Supposons $g \circ f$ injective.
Soient x et x' deux éléments de E. Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que $x = x'$.
Finalement : $\forall\ (x, x') \in E^2,\ [f(x) = f(x')] \Longrightarrow [x = x']$. Ce qui signifie que f est injective.

Conclusion. $[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$.

Exercice 3. — (Une "pseudo-réciproque", 2). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$$

Supposons $g \circ f$ surjective.
Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse, il existe un élément x de E tel que : $g(f(x)) = z$. D'où $z \in g(F)$, ce qui assure que g est surjective.

Ainsi : $[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$.

Exercice 4. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (4x-3y,\ 2x+y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

Soient (X,Y) et (x,y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $F(x,y)=(X,Y)$. On a :

$$F(x,y)=(X,Y) \iff \begin{cases} 4x-3y=X \\ 2x+y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} 5y=2Y-X \\ 2x+y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{2Y-X}{5} \\ 2x=Y-\dfrac{2Y-X}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=\dfrac{2Y-X}{5} \\ x=\dfrac{X+3Y}{10} \end{cases} \iff (x,y)=\left(\frac{X+3Y}{10},\frac{2Y-X}{5}\right)$$

En résumé : $F(x,y)=(X,Y) \iff (x,y)=\left(\dfrac{X+3Y}{10},\dfrac{2Y-X}{5}\right)$.

On a ainsi établi que tout élément (X,Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par F dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application F est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) &\longmapsto \left(\frac{X+3Y}{10},\frac{2Y-X}{5}\right) \end{aligned}$$

Exercice 5. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^5=(z-\mathrm{i})^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Soit z un nombre complexe distinct de i (qui n'est manifestement pas solution). On a :

$$\begin{aligned}
&(z+\mathrm{i})^5=(z-\mathrm{i})^5 \\
\iff &\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5=1 \qquad \text{(légitime car } z\neq \mathrm{i}) \\
\iff &\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\in \mathbb{U}_5 \qquad \text{(par définition de racine 5ème de l'unité)} \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,0,4\,]\!],\quad \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\omega^k \qquad \text{(en ayant noté } \omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}) \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,0,4\,]\!],\quad z+\mathrm{i}=\omega^k(z-\mathrm{i}) \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,0,4\,]\!],\quad \left(1+\omega^k\right)\mathrm{i}=\left(\omega^k-1\right)z \qquad \text{(NB : égalité fausse pour } k=0) \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,1,4\,]\!],\quad z=\frac{\omega^k+1}{\omega^k-1}\,\mathrm{i} \qquad \text{(légitime car } k\neq 0\text{, d'où } \omega^k\neq 1) \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,1,4\,]\!],\quad z=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}-1}\,\mathrm{i} \\
\iff &\exists\, k\in[\![\,1,4\,]\!],\quad z=\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\,\mathrm{i} \qquad \text{(technique de l'angle-moitié)}
\end{aligned}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 1, 4 \,]\!], \quad z = \frac{1}{\tan\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)}$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left[(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5\right] \iff \left[\exists\, k \in [\![\, 1, 4 \,]\!], \quad z = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\right]$

Remarque. *La fonction cotangente, notée* cotan, *est définie (sur* $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$*) en posant* $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

Exercice 6. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $(1+\mathrm{j})^{600}$.

Selon le cours : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_3} \omega = 0$. En particulier : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ (puisque : $\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$).

Il s'ensuit que $1 + \mathrm{j} = -\mathrm{j}^2$. Donc :

$$(1+\mathrm{j})^{600} = \left(-\mathrm{j}^2\right)^{600} = \mathrm{j}^{1200} = \left(\mathrm{j}^3\right)^{400} = 1^{400} = 1$$

Conclusion. $(1+\mathrm{j})^{600} = 1$

Exercice 7. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe.
On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Soit $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } R \iff R(z) = Z \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b = Z \iff z = \frac{Z-b}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par R, qui est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(Z-b)$.

Conclusion. On déduit que R est bijective, et que sa bijection réciproque est $\begin{aligned} R^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ Z &\longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(Z-b) \end{aligned}$

Exercice 8. — (Equation et binôme de Newton) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$, en utilisant le binôme de Newton.

Soit z un complexe :

$$\begin{aligned}
&(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5\\
\iff &z^5 + 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathrm{i}z^2 + 5\mathrm{i}z + \mathrm{i} = z^5 - 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 + 10\mathrm{i}z^2 + 5\mathrm{i}z - \mathrm{i}\\
\iff &10\mathrm{i}z^4 - 20\mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i} = 0\\
\iff &5z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \quad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Résolvons l'équation $(\spadesuit)$. Via le changement de variable $Z = z^2$, celle-ci se réécrit : $5Z^2 - 10Z + 1 = 0 \quad (\clubsuit)$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 80$. En observant que $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, on en déduit que les solutions de $(\clubsuit)$ sont :

$$Z_{1,2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{10} \quad \text{càd} \quad Z_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

En revenant à la variable initiale, on en déduit que z est solution de l'équation initiale SSI :

$$z^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou} \quad z^2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

En observant que les réels $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$ sont strictement positifs[¶], on en déduit finalement les solutions de l'équation.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5 \iff z \in \left\{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right\}$$

Remarque (non-exigible en colle). On peut déduire des exos 5 et 8 la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

En effet, ces deux exos donnent 2 méthodes pour la résolution de la même équation $(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$. On peut donc en déduire que les ensembles de solutions sont les mêmes(!), càd :

$$\left\{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right\} = \left\{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\right\}$$

Puisque $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ sont positifs (la fonction tangente est à valeurs positives sur $[0, \pi/2[$), on en déduit que :

$$\left\{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right\} = \left\{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}, \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\right\}$$

En observant que $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} > \dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{d'où} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}$$

Ainsi : $\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ‖

¶. Pour le premier c'est évident ; pour le second, il suffit d'observer que $5^2 = 25$ est strictement supérieur à $(2\sqrt{5})^2 = 20\ldots$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour les amoureux du détail (je ne doute pas un instant...).

‖. La dernière simplification est fun !