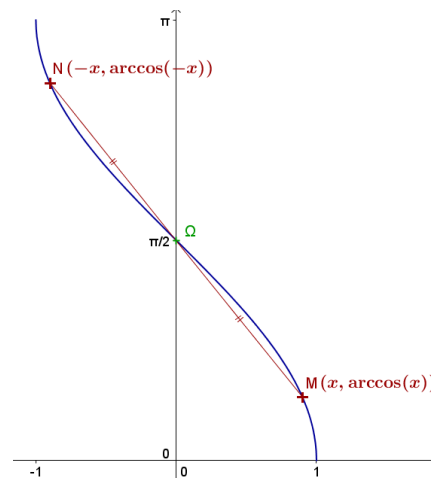


EXERCICES 7 – FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

EXERCICE 1. — Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Interprétation graphique. Le point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de $\arccos$ (voir ci-contre).

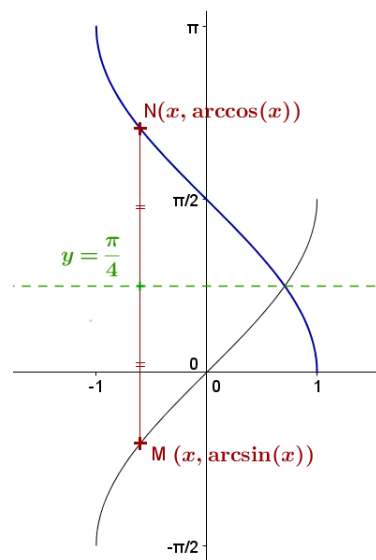


EXERCICE 2. — Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Et que peut-on dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x < 0$?

EXERCICE 3. — Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Interprétation graphique. Les courbes représentatives de $\arccos$ et de $\arcsin$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$ (voir ci-contre).



EXERCICE 4. — Etablir que : $\forall x \in [0, 1], \arcsin(x) \geq x$.

Interprétation graphique. La courbe représentative de $\arcsin$ est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $[0, 1]$.

EXERCICE 5. — Etablir que : $\forall x \geq 0, \arctan(x) \leq x$.

Interprétation graphique. La courbe représentative de $\arctan$ est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 6. — Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\sin(\arccos(x))$	3/ $\cos(2\arccos(x))$	5/ $\sin(2\arccos(x))$	7/ $\sin(2\arctan(x))$
2/ $\cos(\arcsin(x))$	4/ $\cos(2\arcsin(x))$	6/ $\cos(2\arctan(x))$	8/ $\tan(2\arcsin(x))$

EXERCICE 7. — Etablir que : $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

EXERCICE 8. — **FORMULE DE MACHIN.** *

1/ Calculer $A = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.

2/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3/ Montrer que : $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

*. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 9. — **(CA-DEAU !).** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x^3)$. Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

EXERCICE 10. — **(TANGENTE ET ARCTANGENTE).**

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

2/ Etablir que pour tout entier naturel n on a : $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$

3/ En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$ en fonction de N ; puis la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

EXERCICE 11. — **(COSINUS ET ARCCOSINUS).**

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{(n^2-1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

EXERCICE 12. — **(ARCSINUS).**

1/ On pose $A(x) = \cos(\arcsin(x))$. Pour quelles valeurs de x l'expression $A(x)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs. Simplifier $A(x)$ pour tout réel x de D .

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)$$

EXERCICE 13. — **UNE FONCTION BIJECTIVE.** On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ en posant pour tout réel x de I : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1/ Démontrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de f^{-1} .

3/ Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$$

4/ Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et établir que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

EXERCICE 14. — **EQUATION.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \quad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

Indication : mais quelles sont donc les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$?

EXERCICE 15. — (DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN, PROBLÈME 1 NOVEMBRE 2023).

1/ **Question préliminaire.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x - i)^7 - (x + i)^7 = 0$$

PARTIE 1 - UNE RELATION DE RÉCURRENCE

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan'(x) = 1$$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ à partir de celles de $\arctan^{(n+1)}$ et de $\arctan^{(n)}$. Puisque l'on connaît $\arctan^{(0)}$ et $\arctan^{(1)}$, on peut donc en déduire $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(3)}$ à partir de $\arctan^{(1)}$ et $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(4)}$...

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.

PARTIE 2 - FORMULES EXPLICITES DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}, \quad g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x \neq -a$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe** a .

On **admettra** également que pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

6/ “Le cas impair” : calcul de $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \left((-1)^k - 1 \right) x^{2n+1-k}$$

b/ Dédurre de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

d/ **Application.** En utilisant la formule de la question précédente, vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7} (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)$$

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\cotan\left(-\frac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On rappelle que $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ (pour tout réel $x \neq 0 \pmod{\pi}$).

7/ “Le cas pair” : calcul de $\arctan^{(2n)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Etablir que :

$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$