

CORRIGÉS DES EXERCICES 7 – FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

EXERCICE 1. — Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Interprétation graphique. Le point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de $\arccos$ (voir ci-contre).

Posons pour tout réel $x \in [-1; 1], \quad f(x) = \arccos(x) + \arccos(-x)$.

La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$, et pour tout réel $x \in] -1, 1[$ on a :

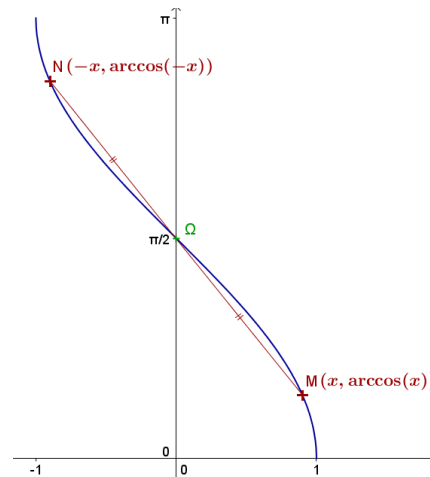
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-(-1)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $] -1, 1[$, égale à $f(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = \pi$.

En résumé : $\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \pi$.

Pour fermer les crochets, on peut observer que : $f(1) = \arccos(1) + \arccos(-1) = 0 + \pi = \pi$ et $f(-1) = f(1)$ puisque f est paire.

Conclusion. $\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$



EXERCICE 2. — Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Et que peut-on dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x < 0$?

Pour tout réel x strictement positif, posons : $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

Autrement écrit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Par un raisonnement analogue, ou en utilisant le fait que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est impaire, on peut établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion. En résumé : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \times \frac{\pi}{2}$

EXERCICE 3. — Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Cf cours.

EXERCICE 4. — Etablir que : $\forall x \in [0, 1], \arcsin(x) \geq x$.

Interprétation graphique. La courbe représentative de $\arcsin$ est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $[0, 1]$.

Pour tout réel x dans $[0, 1]$, on pose : $f(x) = \arcsin(x) - x$. La fonction f est dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout réel $x \in [0, 1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

Il s'ensuit que f' est positive sur $[0, 1[$. On en déduit que f est croissante sur $[0, 1]$ (en utilisant la continuité de f sur $[0, 1]$ pour fermer le crochet).

Puisqu'il est par ailleurs immédiat que $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $[0, 1]$.

Conclusion. $\forall x \in [0, 1], \arcsin(x) \geq x$

EXERCICE 5. — Etablir que : $\forall x \geq 0, \arctan(x) \leq x$.

Interprétation graphique. La courbe représentative de $\arctan$ est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $\mathbb{R}_+$.

Cf cours : on peut procéder comme précédemment (via une étude de fonction), ou utiliser la concavité de $\arctan$ sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 6. — Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\sin(\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1, 1]$. On a : $\sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1$.

D'où : $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$. D'où : $|\sin(\arccos(x))| = \sqrt{1 - x^2}$.

Il reste à voir que $\sin(\arccos(x))$ est positif puisque $\arccos(x)$ appartient à $[0, \pi]$, pour conclure que : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

2/ $\cos(\arcsin(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1, 1]$. On a : $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$.

D'où : $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. D'où : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$.

Il reste à voir que $\cos(\arcsin(x))$ est positif puisque $\arcsin(x)$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, pour conclure que : $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

3/ $\cos(2\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1, 1]$. On a : $\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$

4/ $\cos(2\arcsin(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1, 1]$. On a : $\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$

5/ $\sin(2\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1, 1]$. On a : $\sin(2\arccos(x)) = 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

6/ $\cos(2 \arctan(x))$

Soit x un réel quelconque. On a : $\cos(2 \arctan(x)) = 2 \cos^2(\arctan(x)) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(\arctan(x))} - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2 \arctan(x)) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

7/ $\sin(2 \arctan(x))$

Soit x un réel quelconque. On a : $\sin(2 \arctan(x)) = \tan(2 \arctan(x)) \times \cos(2 \arctan(x))$.

Or : $\tan(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{1 - x^2}$ (duplication pour la tangente) et $\cos(2 \arctan(x)) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ selon la question précédente.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{1 + x^2}$

8/ $\tan(2 \arcsin(x))$

Soit x un réel de $[-1, 1] \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$. On a :

$$\tan(2 \arcsin(x)) = \frac{\sin(2 \arcsin(x))}{\cos(2 \arcsin(x))} = \frac{2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x))}{\cos(2 \arcsin(x))} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1] \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \tan(2 \arcsin(x)) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

EXERCICE 7. — Etablir que : $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

Cf cours.

EXERCICE 8. — **FORMULE DE MACHIN.***

1/ Calculer $A = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.

2/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3/ Montrer que : $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ.

1) On a : $\tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2/5}{1 - (1/5)^2} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{5}{12}$.

D'où : $\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \tan\left(2 \times 2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5/6}{1 - (5/12)^2} = \frac{5/6}{119/144} = \frac{120}{119}$.

On en déduit que : $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) [\pi]$.

Puisque $1/5$ est strictement compris entre 0 et 1, son image par la fonction arctangente appartient à l'intervalle $]0, \pi/4[$; par suite $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \in]0, \pi[$.

*. John Machin fut un mathématicien anglais du 18^{ème} siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).

Puisque $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) \in [\pi]$, et que les deux réels intervenant dans cette congruence appartiennent au même intervalle $]0, \pi[$, on peut conclure qu'ils sont égaux.

$$\text{Conclusion : } 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

2) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

D'après la formule d'addition pour la tangente, on a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\right) = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y-x}{y+x}}{1 - \frac{x}{y} \times \frac{y-x}{y+x}} = \frac{\left(\frac{x(y+x) + (y-x)y}{y(y+x)}\right)}{\left(\frac{y(y+x) - x(y-x)}{y(y+x)}\right)} = \frac{\left(\frac{x^2 + y^2}{y(y+x)}\right)}{\left(\frac{x^2 + y^2}{y(y+x)}\right)} = 1.$$

D'autre part : $\tan(\pi/4) = 1$.

On en déduit que : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4} \in [\pi]$.

Les hypothèses faites sur les réels x et y permettent alors d'affirmer que les réels $\frac{x}{y}$ et $\frac{y-x}{y+x}$ sont strictement compris entre 0 et 1. Donc les images par la fonction arctangente de ces deux derniers réels appartiennent à l'intervalle $]0, \pi/4[$; par suite leur somme est dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, et à plus forte raison : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \in]0, \pi[$.

Puisque $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4} \in [\pi]$ et que les deux réels intervenant dans cette congruence appartiennent au même intervalle $]0, \pi[$, on peut conclure qu'ils sont égaux.

$$\text{Conclusion : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [0 < x < y] \implies \left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4} \right].$$

3) D'après la relation de la question 2, appliquée à $x = 119$ et $y = 120$ on a :

$$\arctan\left(\frac{119}{120}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs : $\arctan\left(\frac{119}{120}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.[†] D'où : $\arctan\left(\frac{119}{120}\right) = \frac{\pi}{2} - 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.

On déduit de ce qui précède que : $\frac{\pi}{2} - 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ainsi : } 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 9. — **(CA-DEAU !).** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x^3)$. Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

La fonction cube réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et la fonction arctangente réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi/2; \pi/2[$.

Leur composée est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi/2; \pi/2[$.

Conclusion. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi/2; \pi/2[$.

[†]. Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$.

EXERCICE 10. — **(TANGENTE ET ARCTANGENTE).**

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

Soit (a, b) un couple de réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $a - b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. On a :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

2/ Etablir que pour tout entier naturel n on a : $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$

Soit n un entier naturel. On a d'une part :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)\right) = \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

D'autre part, selon la question 1 :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{1}{n^2 + 3n + 2}}{\frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2}} = \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

On en déduit que : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)\right)$.

Par suite : $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right) \quad [\pi]$

Pour “faire disparaître le $[\pi]$ ”, il reste à observer que les termes de gauche et de droite de cette relation sont deux réels de l'intervalle $[0, -\pi/2[$, qui est de longueur strictement inférieure à π .

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$

3/ En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$ en fonction de N ; puis la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

Soit N un entier naturel. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=0}^N \left[\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) \right] = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{N+2}\right)$$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{N+2}\right)$. D'où : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 11. — **(COSINUS ET ARCCOSINUS).**

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{(n^2 - 1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

Même principe que dans l'exercice précédent.

EXERCICE 12. — **(ARCSINUS).**

1/ On pose $A(x) = \cos(\arcsin(x))$. Pour quelles valeurs de x l'expression $A(x)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs. Simplifier $A(x)$ pour tout réel x de D .

Soit x un réel compris entre -1 et 1 . On a : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}$.

D'où : $\forall x \in [-1, 1], |\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$.

Pour se débarrasser des valeurs absolues, il reste à observer que : $\arcsin([-1, 1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent : $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) \geq 0$.

Conclusion. $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)$$

$$\text{D'une part : } \sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \quad (\spadesuit)$$

D'autre part, d'après la formule d'addition pour le sinus, on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, d'après la question précédente, on a : } \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Et : } \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{On en déduit que : } \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{D'où : } \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \quad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que :

$$\begin{aligned} \left[\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right) \right] [2\pi] \\ \vee \left[\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right) \right] [2\pi] \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

Pour conclure, on commence par observer que : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par ailleurs : $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, car $1/3$ et $1/4$ sont compris entre 0 et $1/2$, et que $\arcsin\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. D'où : $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

En particulier, $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)$ appartiennent tous deux au segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Conclusion. } \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)$$

EXERCICE 13. — **UNE FONCTION BIJECTIVE.** On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ en posant pour tout réel x de I : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1/ Démontrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de f^{-1} .

3/ Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$$

4/ Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et établir que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Corrigé. 1) La fonction f est strictement croissante (et positive) sur I , puisque c'est l'inverse d'une fonction strictement décroissante (et positive) sur I .[‡]

En outre, f est continue sur I (essentiellement car la fonction $\cos$ l'est, et qu'elle ne s'annule pas sur I).

La fonction f étant strictement monotone et continue, elle réalise une bijection de I sur $f(I) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ c'est-à-dire sur $[1, \sqrt{2}]$.

Conclusion : f réalise une bijection de I dans $J = [1, \sqrt{2}]$.

2) Comme une fonction (à valeurs réelles) bijective et sa bijection réciproque ont la même monotonie, on peut affirmer que f^{-1} est strictement croissante sur J .

3) Soit x un réel appartenant à $J = [1, \sqrt{2}]$.

Alors : $f(f^{-1}(x)) = x$ d'où : $\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x$. Et puisque x est non nul ($0 \notin J$), on peut prendre les inverses des termes de cette égalité pour obtenir :

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad (\spadesuit)$$

En outre, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :

$$\sin(f^{-1}(x)) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))}$$

Or, puisque $x \in J$, on a $f^{-1}(x) \in I = [0, \pi/4]$; la fonction sinus étant positive sur cet intervalle, on a donc

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))}$$

En utilisant $(\spadesuit)$, on en déduit que :

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Le réel x étant un réel arbitraire de J dans le raisonnement précédent, on peut affirmer que :

$$\forall x \in J, \quad \begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$$

[‡]. On peut bien sûr justifier la stricte croissance par l'étude du signe de f' , égale à $\sin / \cos^2$ dans le présent cas.

4) D'après la propriété relative à la dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction f^{-1} est dérivable en tout réel $f(a)$ tel que $f'(a)$ ne s'annule pas. Or dans cet exercice : $f' = \sin / \cos^2$. Donc f' ne s'annule qu'en 0. Il s'ensuit que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\}$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que f^{-1} est dérivable sur $]1, \sqrt{2}]$.

Pour tout réel $y \in]0, \pi/4]$, on a : $(f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}$.

$$\text{D'où : } (f^{-1})' \left(\frac{1}{\cos(y)} \right) = \frac{\cos^2(y)}{\sin(y)} = \cos^2(y) \times \frac{1}{\sin(y)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(y)} \right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}}$$

$$\text{Soit : } (f^{-1})' \left(\frac{1}{\cos(y)} \right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(y)} \right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(y)} \right)^2}}}$$

Par conséquent, pour tout réel $x \in]1, \sqrt{2}]$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$, et : $\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

EXERCICE 14. — **EQUATION.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \quad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

Indication : mais quelles sont donc les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$?

Comme l'énoncé le suggère, on pose : $X = \tan(x)$. L'équation (E) se réécrit alors : $1 + X + X^2 + X^3 = 0$. Les racines de cette équation sont les racines quatrième de l'unité sauf 1, c'est-à-dire : -1 et $\pm i$.

En revenant à la variable initiale, il ne reste donc plus que le cas : $\tan(x) = -1$, puisque la fonction tangente est à valeurs réelles. Or : $\tan(x) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Conclusion. Les solutions de (E) sont les réels $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 15. — **(DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN, PROBLÈME 1 NOVEMBRE 2023).**

1/ **Question préliminaire.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x - i)^7 - (x + i)^7 = 0$$

Soit x un complexe. On a :

$$\begin{aligned} (x - i)^7 - (x + i)^7 &= 0 \\ \iff (x - i)^7 &= (x + i)^7 \\ \iff \left(\frac{x - i}{x + i} \right)^7 &= 1 \quad (\text{car } -i \text{ n'est pas solution de l'équation}) \\ \iff \frac{x - i}{x + i} &\in \mathbb{U}_7 \\ \iff \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, \frac{x - i}{x + i} &= e^{2ik\pi/7} \\ \iff \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, x - i &= e^{2ik\pi/7} (x + i) \\ \iff \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, x(1 - e^{2ik\pi/7}) &= i(1 + e^{2ik\pi/7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = i \frac{1 + e^{2ik\pi/7}}{1 - e^{2ik\pi/7}} \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = -\cotan\left(\frac{k\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\left((x-i)^7 - (x+i)^7 = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = -\cotan\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right)$

PARTIE 1 - UNE RELATION DE RÉCURRENCE

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2) \arctan'(x) = 1$$

D'après le cours, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2) \arctan'(x) = 1$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x , notons :

$$g(x) = 1+x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = g(x) \arctan'(x)$$

D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1$.

Il s'ensuit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = 0 \quad (\spadesuit)$.

Or, selon la formule de Leibniz, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) (\arctan')^{(n+1-k)}(x)$.

Puisqu'il est clair que $g^{(k)}$ est identiquement nulle pour tout entier $k \geq 3$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) (\arctan')^{(n+1-k)}(x)$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = (1+x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) \quad (\clubsuit)$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ à partir de celles de $\arctan^{(n+1)}$ et de $\arctan^{(n)}$. Puisque l'on connaît $\arctan^{(0)}$ et $\arctan^{(1)}$, on peut donc en déduire $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(3)}$ à partir de $\arctan^{(1)}$ et $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(4)}$...

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.

PARTIE 2 - FORMULES EXPLICITES DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}, g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x \neq -a$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Copier-coller de la preuve faite en classe pour la dérivée n -ème de $\frac{1}{1-x}$.

On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe** a .

On **admettra** également que pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

Soit x un réel, et soit n un entier naturel. On a : $\arctan^{(n+1)}(x) = (\arctan')^{(n)}(x)$.

$$\text{Or : } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

Il s'ensuit, d'après la question 4, que :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} \right) = \frac{(-1)^n n! i}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right)$$

CONCLUSION. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

6/ “Le cas impair” : calcul de $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \left((-1)^k - 1 \right) x^{2n+1-k}$$

Selon la formule du binôme de Newton :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-i)^k x^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k x^{2n+1-k}$$

$$\text{CONCLUSION.} \quad P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left((-1)^k - 1 \right) i^k x^{2n+1-k}$$

b/ Déduire de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

D'après la question précédente, et en observant que $((-1)^k - 1)$ est nul lorsque k est pair (et vaut -2 lorsque k est impair), on a :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-2) i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

CONCLUSION. $P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

D'après les questions 5 et 6b, on a :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(-1)^{2n} (2n)! i}{2(1+x^2)^{2n+1}} \times \left(-2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)} \right)$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = -\frac{(2n)! i}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p i x^{2(n-p)}$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p x^{2(n-p)}$$

CONCLUSION. $\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$

d/ **Application.** Vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7} (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)$$

Il suffit d'appliquer la question précédente, avec $n = 3$.

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\cotan\left(-\frac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in [1, 6]$.

On a :

$$(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0) \iff \arctan^{(7)}(x) = 0 \iff ((x-i)^7 - (x+i)^7 = 0)$$

La conclusion provient de cette équivalence, et de la question 1.

7/ **“Le cas pair” : calcul de $\arctan^{(2n)}$.** Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Etablir que :

$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$

Il “suffit” d'adapter les calculs faits dans les questions 6-a, 6-b et 6-c.