Chapitre 1 — Eléments de logique et de théorie des ensembles

Table des matières

1. Eléments de logique

Définition 1 - (assertion logique). On appelle **assertion logique** tout assemblage de mots et de symboles obéissant à une syntaxe, à laquelle on peut associer une **valeur de vérité** : Vrai (V) ou Faux (F).

Deux assertions P et Q sont **synonymes ou logiquement équivalentes** si elles ont même valeur de vérité. On le note $P \equiv Q$.

➤ **Règles logiques**

On admet les règles suivantes :

• **Règle de non contradiction** : on ne peut avoir une assertion vraie et fausse en même temps.

• **Règle du tiers exclu** : une assertion qui n'est pas vraie est fausse et une assertion qui n'est pas fausse est vraie.

1.1. Négation, conjonction et disjonction.

Définition 2 - (négation) La **négation** de l'assertion P est l'assertion, notée non P, $\overline{P}$ ou $\neg P$ qui est vraie lorsque P est fausse et fausse sinon.

La valeur de vérité de $\overline{P}$ dépend de celle de P, elles satisfont à une **table de vérité**.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Montrer que $\overline{P}$ est vraie c'est trouver un **contre-exemple** à P.

Conséquence (Double négation). $\overline{\overline{P}} \equiv P$

Définition 3 - (Conjonction et disjonction). Soient P et Q deux assertions.

• La **conjonction** des deux assertions P et Q, notée Pet Q ou $P \wedge Q$, est l'assertion qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

• La **disjonction** des deux assertions P et Q, notée Pou Q ou $P \vee Q$, est l'assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie, et fausse sinon.

P	Q	Pet Q	Pou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Observons que pour toute assertion P, l'assertion $P \wedge \overline{P}$ est toujours fausse (non-contradiction), tandis que $P \vee \overline{P}$ est toujours vraie (tiers exclu).

Propriété 1 - Soient P, Q et R trois assertions logiques. On a :

1) $P \wedge P \equiv P$ et $P \vee P \equiv P$

2) **Commutativité :** $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ et $P \vee Q \equiv Q \vee P$

3) **Associativité :** $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ et $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

4) **Distributivité :** $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

1.2. Implication et équivalence.

Définition 4 - (implication).

Soient P et Q deux assertions. On définit $P \Longrightarrow Q$ par

$$[P \Longrightarrow Q] \equiv [\overline{P} \text{ ou } Q]$$

$P \Longrightarrow Q$ est vraie si P est fausse ou Q est vraie et fausse sinon.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

➤ **Vocabulaire associé aux implications**

$P \Longrightarrow Q$: P est l'hypothèse et Q la conclusion.

On dit que P (est vraie) implique Q (est vraie), si P (est vraie) alors Q (est vraie).

P est une **condition suffisante** pour avoir Q : pour avoir Q, **il suffit** d'avoir P.

Q est une **condition nécessaire** pour avoir P : pour avoir P, **il faut** avoir Q.

Définition 5 - (équivalence). Soient P et Q deux assertions.
On définit $P \Longleftrightarrow Q$ par

$$[P \Longleftrightarrow Q] \equiv [P \Longrightarrow Q \text{et } Q \Longrightarrow P]$$

➤ **Vocabulaire associé aux équivalences**

$P \Longleftrightarrow Q$: P est équivalente à Q.
P (est vraie) si et seulement si Q (est vraie).
P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q : pour avoir P, **il faut et il suffit** d'avoir Q.

1.3. **Règles de négation.**

Propriété 2 - Règles de négation (lois de Morgan). Soient P et Q deux assertions.

$$\overline{P\text{et } Q} \equiv \overline{P}\text{ou } \overline{Q} \qquad \text{et} \qquad \overline{P\text{ou } Q} \equiv \overline{P}\text{et } \overline{Q}$$

Conséquence. Soient P et Q deux assertions. $\overline{P \Longrightarrow Q} \equiv P\text{et } \overline{Q}$

Remarque. La négation d'une implication n'est donc pas une implication!!!

2. Notations et vocabulaire sur les ensembles

2.1. **Appartenance.**

Définition 6 - (ensemble). Un **ensemble** est défini soit **extension** par énumération de ses éléments, soit **en compréhension** comme les objets vérifiant une certaine propriété.

Exemple. En extension : $\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}, \{1;4\}, [0,1], \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
En compréhension : $\{M \in \mathscr{P} : MA = MB\}, \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

Cas particulier (intervalle d'entiers). Soient n et m deux entiers relatifs. On pose

$$[\![n,m]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq k \leq m\} = [n,m] \cap \mathbb{Z}$$

Notations. Lorsque x est un élément de E, on note $x \in E$ et on lit «x appartient à E». Si x n'est pas un élément de E on note alors $x \notin E$.

Définition 7 - (ensemble vide, singleton). Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément x est appelé **singleton** et se note $\{x\}$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et se note $\emptyset$ ou $\{\,\}$.

2.2. **Quantificateurs.** On considère une assertion P dépendant d'une variable x qui appartient à un ensemble E ; on la notera $P(x)$.

Définition 8 - (quantificateurs)

➤ On définit l'assertion

$$\forall\, x \in E, P(x)$$

comme l'assertion qui est vraie si pour tout x élément de E, $P(x)$ est vraie.

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel** et est lu «quel que soit», «pour tout»

➤ On définit l'assertion

$$\exists\, x \in E, P(x)$$

comme l'assertion qui est vraie s'il existe au moins un x élément de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel** et est lu «il existe au moins un ... »

➤ On définit l'assertion

$$\exists\, !x \in E, P(x)$$

comme l'assertion qui est vraie s'il existe un unique x élément de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Le symbole $\exists\,!$ est appelé **quantificateur d'unicité** et est lu «il existe un unique ... »

Remarque. Attention!!! Dans une assertion contenant plusieurs quantificateurs on peut changer l'ordre de deux quantificateurs de même nature mais on ne peut changer l'ordre de deux quantificateurs de nature différentes.

Exemple. Comparer les deux assertions suivantes :

$$\forall x \geq 0,\, \exists y \geq 0,\, y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \exists y \geq 0,\, \forall x \geq 0,\, y = \sqrt{x}.$$

PROPRIÉTÉ 3 - Règles de négation

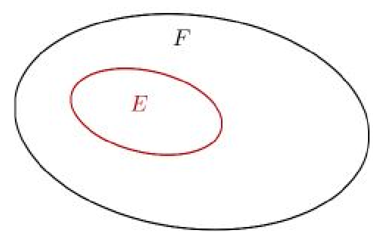
➢ non $(\forall\, x \in E,\, P(x)) \equiv \exists\, x \in E,\, \overline{P}(x)$

➢ non $(\exists\, x \in E,\, P(x)) \equiv \forall\, x \in E,\, \overline{P}(x)$

Exemple. non $(\forall x \geq 0,\, \exists y \geq 0,\, y = \sqrt{x}) \Longleftrightarrow \quad \ldots$

2.3. **Inclusion.**

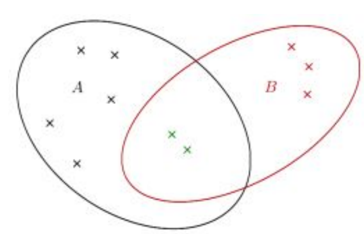
DÉFINITION 9 - Soient E et F deux ensembles.
On dit que E est **inclus** dans F si tout élément de E appartient à F. On le note $E \subset F$.
On dit également que F contient E, noté $F \supset E$ ou encore E est un **sous-ensemble** de F, une **partie** de F.
Dans le cas contraire, E est non inclus dans F et on note $E \not\subset F$.



PROPRIÉTÉ 4 - .

➢ Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$

➢ **Règle de double-inclusion**. $(E \subset F$ et $F \subset E) \Longleftrightarrow (E = F)$



DÉFINITION 10 - Deux ensembles A et B sont dits **distincts** si $A \neq B$, c'est-à-dire s'ils ne contiennent pas les mêmes éléments.

DÉFINITION 11 - On appelle **ensemble des parties** de E, noté $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble formé par tous les sous-ensembles de E.

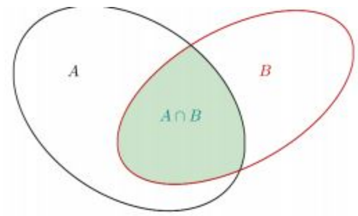
Exemple. $\mathscr{P}(\{1;2\}) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}$.

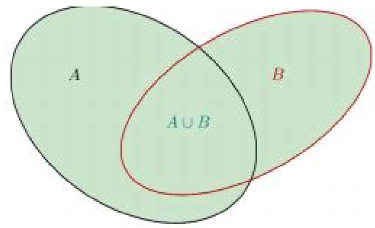
2.4. Intersection et union.

Définition 12 - (intersection et union). Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

➢ $A \cap B$ est l'**intersection de** A **et** B ; c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B.

➢ $A \cup B$ est l'**union de** A **et** B ; c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un ensemble A et B.

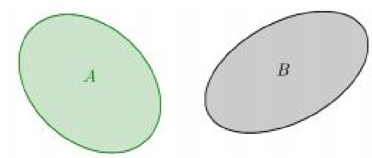




Propriété 5 - (commutativité et distributivité). Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

➢ $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

➢ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



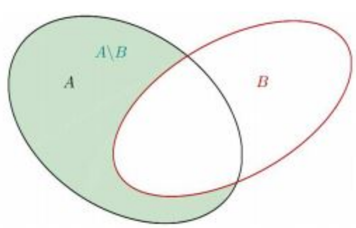
Définition 13 - Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

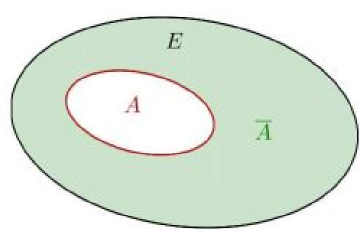
2.5. Complémentaire et différence.

Définition 14 - Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

➢ $A \setminus B$ est la **différence de** A **par** B ; c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

➢ $\overline{A}$ est le **complémentaire de** A **dans** E ; c'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Autres notations du complémentaire : $E \setminus A$ ou C_E^A.





Propriété 6 - Soient A et B deux parties d'un même ensemble E.

➢ $\overline{(\overline{A})} = A$ ➢ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ➢ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
➢ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ➢ $\overline{\emptyset} = E$ ➢ $A \cup \overline{A} = E$
➢ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Exemple d'application de la règle de double inclusion (et de double implication). *Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. Etablir que : $[A \subset B] \iff [A \cup B = B]$.*

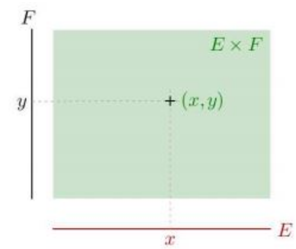
Exemple d'application des propriétés de l'inclusion, de l'union... . *Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. On définit la **différence symétrique de** A **et** B (et on note $A\Delta B$) la partie suivante :*

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

Etablir que : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2.6. Produit cartésien.

Définition 15 - (produit cartésien). Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.



Exemple : le rectangle $[0, 1] \times [-1, 1]$.

Cas particuliers. On note $E \times E$ par E^2 et plus généralement si $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n\,\text{fois}}$ par E^n.

Exemple. Le plan peut donc être assimilé à $\mathbb{R}^2$ et l'espace à $\mathbb{R}^3$.

Vocabulaire. Soient $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des ensembles. Les éléments de $E_1 \times E_2$ s'appellent des **couples**, de $E_1 \times E_2 \times E_3$ des **triplets** et plus généralement de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ des n**-uplets**.

3. Méthodes de démonstration

3.1. Axiome, postulat, théorème.

Définition 16 - (axiome et postulat). On appelle **axiome** une assertion que l'on pose vraie a priori et **postulat** ou **conjecture** une assertion que l'on suppose vraie.

Exemple. L'axiome d'Euclide de la géométrie plane : «Par un point du plan on peut mener une unique parallèle à une droite donnée».

Définition 17 - (théorème ou tautologie). Un **théorème** de logique appelé aussi **tautologie** est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité des éléments qui la composent. Elle se déduit d'axiomes ou d'autres théorèmes.

Exemple. L'assertion $Q = \left[P \text{ou } \overline{P}\right]$ est une tautologie.

3.2. Comment prouver une implication ?

Par syllogisme. Soient P, Q et R trois assertions logiques. On a :

$$[(P \Longrightarrow Q)\text{et } (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [P \Longrightarrow R]$$

Exemple (Aristote, 350 av.JC). «Les hommes sont mortels, or tous les Grecs sont des hommes, donc tous les Grecs sont mortels».

Par disjonction de cas. Soient P, Q et R trois assertions logiques.

$$[(P \Longrightarrow R) \text{et } (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [(P \text{ou } Q) \Longrightarrow R]$$

Exemple. Un entier naturel et son carré ont la même parité.

Par contraposition. Soient P et Q deux assertions logiques.

$$[P \Longrightarrow Q] \equiv [\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}]$$

Cette dernière assertion est appelée **contraposée** de $P \Longrightarrow Q$.

Exemple. Montrer que si $\dfrac{x}{1+x} < 0$ alors $x < 0$.

Conséquence. Soient P et Q deux assertions logiques.

$$P \Longleftrightarrow Q \equiv \overline{P} \Longleftrightarrow \overline{Q}$$

3.3. Démonstration par l'absurde.

Principe. Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on montre que sa négation $\overline{P}$ entraine une proposition et son contraire. On aboutit alors à une contradiction. On peut conclure que l'hypothèse $\overline{P}$ est fausse et donc que P est vraie.

Propriété 7 - $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ (càd : $\sqrt{2}$ est irrationnel).

3.4. Démonstration par analyse-synthèse.

Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci, forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé. On raisonne alors par analyse-synthèse :

➢ **Analyse** : on suppose qu'il existe au moins une solution, et on essaie d'en tirer le maximum de renseignements la concernant.

➢ **Synthèse** : on reporte dans le problème initial la ou les solution(s) trouvée(s) précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution, puis une unique ou plusieurs.

➢ **Conclusion** : on énonce le résultat démontré.

Théorème 1 - (de décomposition "paire + impaire"). Toute fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque et exemple d'application. Le théorème de décomposition est un énoncé dit *constructif* dans le sens où il donne un moyen explicite d'obtenir l'écriture de f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Concrètement, dans le cas où la fonction f est la fonction exponentielle (définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à zéro), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

La première des deux fonctions intervenant dans la somme ci-dessus est paire, et la seconde est impaire. Plus précisément, on appelle **cosinus hyperbolique** (*resp.* **sinus hyperbolique**) et on note **ch** (*resp.* **sh**) la première (*resp.* deuxième) fonction. On a donc :

Définitions et propriétés.

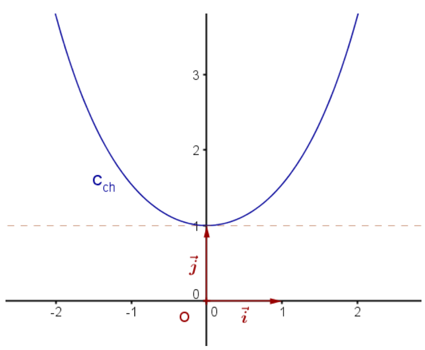
1) **Définition du cosinus hyperbolique** : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

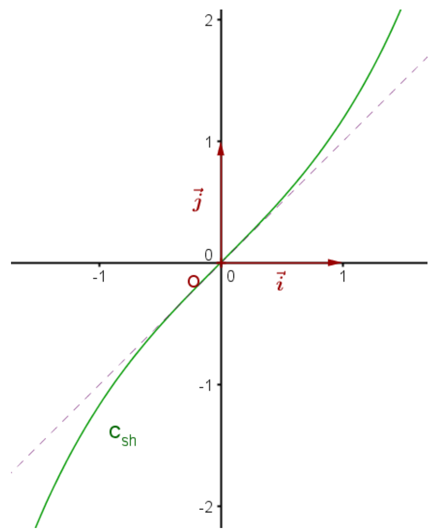
2) **Définition du sinus hyperbolique** : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

3) La fonction ch est paire, et la fonction sh est impaire.

4) En outre : $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$. Il revient au même d'écrire : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x} = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$.

Pour finir, voici à titre d'illustration les courbes représentatives des fonctions ch et sh.





3.5. Démonstration par récurrence.

L'objectif de ce type de raisonnement est de prouver qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n est valable pour toute valeur de celui-ci. Cette méthode comporte quatre étapes :

- ➤ On donne un nom à la propriété que l'on souhaite prouver.
- ➤ **Initialisation** : on vérifie que la propriété $P(0)$ est vraie.

  Remarque : dans certaines situations, la propriété $P(n)$ n'est valable que pour $n \geqslant 1$ (resp. pour $n \geqslant n_0$, avec n_0 un entier) ; dans ce cas, l'initialisation doit consister à vérifier que $P(1)$ est vraie (resp. que $P(n_0)$ est vraie). On parle alors de récurrence décalée.
- ➤ **Hérédité** : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier (ou rang) n (c'est l'hypothèse de récurrence), et on prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
- ➤ **Conclusion** : on peut alors conclure que pour tout entier n la propriété $P(n)$ est vraie.

***Remarque 1** : il existe plusieurs variantes du raisonnement par récurrence. La plus célèbre (la seule que vous connaissez a priori) est celle présentée plus haut, appelée récurrence **faible**.*

*Dans une récurrence **forte**, on suppose pour établir l'hérédité que la propriété est vraie jusqu'au rang n (et non pas simplement au rang n).*

*Dans une récurrence **double**, l'initialisation consiste à vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies ; et l'hérédité consiste à prouver que si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, alors $P(n+2)$ l'est.*

*Dans une récurrence **finie**, l'initialisation consiste à vérifier que $P(0)$ est vraie ; et l'hérédité consiste à prouver que si $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \leqslant n_0$, alors $P(n+1)$ l'est. On prouve ainsi que pour tout entier $n \in [\![0, n_0+1]\!]$ l'assertion $P(n)$ est vraie.*

Nous aurons l'occasion, en cours d'année, de rencontrer ces différentes variantes. En attendant, l'essentiel est que vous maîtrisiez le raisonnement par récurrence "classique" (la récurrence faible donc).

***Remarque 2** : si, après la lecture des lignes précédentes, vous êtes très impatients de tester d'autres raisonnements par récurrence, voici ci-dessous une situation où l'on doit procéder par récurrence double.*

Exercice. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

***Remarque 3** : si, après la lecture des lignes précédentes, vous êtes encore très impatients de tester d'autres raisonnements par récurrence, voici ci-dessous une situation où l'on doit procéder par récurrence finie.*

Exercice. Soit N un entier naturel. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(x^N\right)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)\,!}\, x^{N-n} & \text{si } n \in [\![0, N]\!] \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$

On donne ci-dessous quelques exemples classiques de raisonnement par récurrence.

Exemple 1 : somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 8 - Soit (u_n) une suite arithmétique (de raison r avec $r \in \mathbb{C}$). On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2}\,(n+1)$$

Exemple 2 : somme des cubes

Propriété 9 - (somme des cubes). $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

(Anti-)Exemple 3 : un cas où l'on peut éviter une récurrence — somme des termes d'une suite arithmétique

Le piège dans lequel il ne faut pas tomber est de penser que l'on ne peut démontrer une propriété dépendant d'un entier n que par récurrence sur n. Ce n'est évidemment pas toujours le cas, comme l'illustre l'exemple de l'exercice 1 sur la somme des termes d'une suite arithmétique. On aurait en effet pu écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

➤ d'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_0\right) + r\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = (n+1)\,u_0 + r\,\frac{n\,(n+1)}{2}$

➤ d'autre part : $\displaystyle\frac{u_0 + u_n}{2}\,(n+1) = \frac{(u_0 + u_0 + nr)\,(n+1)}{2} = \frac{2u_0\,(n+1) + nr\,(n+1)}{2} = (n+1)\,u_0 + r\,\frac{n\,(n+1)}{2}$

Ce qui prouve la propriété directement, et nettement plus rapidement que plus haut.

Exemple 4 (plus technique). Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$

(c-à-d : $1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$)

On raisonne par récurrence sur l'entier naturel non nul n pour établir la propriété de l'énoncé.

Notons donc $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$.

➤ **<u>Initialisation</u>** : pour $n = 1$, on a d'une part $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} (2k+1)! = 3! = 6$, et d'autre part $((1+1)!)^{1+1} = 4$.

On en déduit que $P(1)$ est vraie.

➤ **<u>Hérédité</u>** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. Alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k+1)! = \left(\prod_{k=1}^{n} (2k+1)!\right) \times (2n+3)! \underbrace{\geqslant}_{HR} ((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)!$$

Pour établir que $P(n+1)$ est vraie, il "n'y a plus qu'à" montrer que : $\boxed{((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)! \geqslant ((n+2)!)^{n+2}}$.

En avant : $\displaystyle\frac{((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)!}{((n+2)!)^{n+2}} = \frac{((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)!}{((n+1)!)^{n+2}\,(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!\,(n+2)^{n+2}}$

$$= \frac{(n+1)!\displaystyle\prod_{k=2}^{n+3}(n+k)}{(n+1)!\,(n+2)^{n+2}} = \prod_{k=2}^{n+3} \frac{n+k}{n+2}$$

Or, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $n+k \geqslant n+2$. D'où : $\forall\, k \in [\![\, 2, n+3 \,]\!], \quad \dfrac{n+k}{n+2} \geqslant 1$.

Par suite : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+3} \frac{n+k}{n+2} \geqslant 1$.

On en déduit que : $\dfrac{((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)!}{((n+2)!)^{n+2}} \geqslant 1$, c'est-à-dire : $\boxed{((n+1)!)^{n+1}\,(2n+3)! \geqslant ((n+2)!)^{n+2}}$.

Ce qui signifie que la propriété $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, et achève cette récurrence.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}}$