

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°3 — 25 SEPTEMBRE 2021

- *La durée du devoir est de 2 heures, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 5 exercices.*
- *N'oubliez pas :*
 - *de numéroté vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
 - *d'accorder du soin à la présentation, et à votre rédaction (n'oubliez pas les quantificateurs, soyez précis dans votre argumentation).*

Barème : Ex1 : 5pts — Ex2 : 4pts — Ex3 : 3pts — Ex4 : 5pts — Ex5 : 7pts — Total : 24pts

EXERCICE 1 — (EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES).

Les trois questions sont indépendantes.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1) : \quad \cos(3x) = -\cos(5x)$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_2) : \quad \sin(4x) + \sin(7x) + \sin(10x) = 0$$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_3) : \quad \cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$$

EXERCICE 2 — (SOMMES).

Soit N un entier naturel. Calculer la somme

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Indication : on pourra déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout n entier naturel on ait :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

EXERCICE 3 — (UNE IDENTITÉ DANS $\mathbb{R}$).

Soit x un réel, et soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\frac{1}{1+x^2} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

EXERCICE 4 — (CALCUL DE $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ POUR TOUT ENTIER n).

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2/ **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.**

Dans cette question, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

→ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);$$

→ la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$v_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$$

a/ Etablir que la suite (v_n) est positive, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$.

b/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$.

EXERCICE 5 — (SOMME DE $\cos$).

1/ Soient a et b deux nombres réels. A l'aide des formules d'addition et de soustraction pour le sinus, simplifier l'expression :

$$A = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

2/ Soit θ un réel. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

a/ Dans cette question, on suppose que $\theta = 0 [2\pi]$. Quelle est la valeur de S_n dans ce cas ?

b/ On suppose à présent que θ est un réel différent de 0 modulo 2π . Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3/ On suppose dans cette question que θ est un réel différent de 0 modulo π .

Calculer la somme : $U_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$. En déduire la somme : $T_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta)$