Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}3 — 25 septembre 2021

Exercice 1 — (Equations trigonométriques).

1/ Soit x un réel. On a :

$$\cos(3x) = -\cos(5x) \iff \cos(3x) = \cos(\pi - 5x) \iff \left\{\begin{array}{c} 3x = \pi - 5x\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x = 5x - \pi\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{array}\right.$$

Conclusion. $\cos(3x) = -\cos(5x) \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{array}\right.$

2/ Soit x un réel. On a :

$$\sin(4x) + \sin(7x) + \sin(10x) = 0 \iff 2\sin(7x)\cos(3x) + \sin(7x) = 0$$

$$\iff \sin(7x)\,(2\cos(3x) + 1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} \sin(7x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(3x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 7x = 0\ [\pi] \\ \text{ou} \\ 3x = \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

Conclusion. $\sin(4x) + \sin(7x) + \sin(10x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} x = 0\ \left[\dfrac{\pi}{7}\right] \\ \text{ou} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \end{array}\right.$

3/ Soit x un réel. On a :

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \iff \cos^6(x) + \sin^6(x) = \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3$$

$$\iff \cos^6(x) + \sin^6(x) = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x)$$

$$\iff 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0$$

$$\iff \cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 0$$

$$\iff \cos^2(x)\sin^2(x) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0$$

Conclusion. $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \iff x = 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 2 — **(Sommes).**

Soit N un entier naturel. Notons : $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

On cherche trois réels a, b et c tels que pour tout n entier naturel on a :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3} \qquad (\star)$$

➤ **Déterminons la valeur de** a.

En multipliant la relation $(\star)$ par $(n+1)$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = a + \frac{b(n+1)}{n+2} + \frac{c(n+1)}{n+3}$$

L'évaluation en $n=-1$ de cette relation donne : $a = \dfrac{1}{2}$.

➤ **Déterminons la valeur de** b.

En multipliant la relation $(\star)$ par $(n+2)$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a(n+2)}{n+1} + b + \frac{c(n+2)}{n+3}$$

L'évaluation en $n=-2$ de cette relation donne : $b=-1$.

➤ **Déterminons la valeur de** c.

En multipliant la relation $(\star)$ par $(n+3)$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+3)}{n+1} + \frac{b(n+3)}{n+2} + c$$

L'évaluation en $n=-3$ de cette relation donne : $c = \dfrac{1}{2}$.

➤ On déduit de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1/2}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1/2}{n+3}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

d'où finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

Par conséquent :

$$S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] + \sum_{n=0}^{N}\left[\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} - \frac{1}{2}\right)$$

Conclusion.$S_N = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N+2)(N+3)}$

EXERCICE 3 — **(UNE IDENTITÉ DANS $\mathbb{R}$).**

Soit x un réel, et soit n un entier naturel.
On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k$.

Cette somme est géométrique de raison $(-x^2)$, et $(-x^2) \neq 1$ évidemment. On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

On a ainsi établi que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

➤ **Conclusion**. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{1+x^2} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}\right] + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

EXERCICE 4 — **(CALCUL DE $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ POUR TOUT ENTIER n).**

1/ D'après le formulaire de trigo : $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$, d'où : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$. On en déduit que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Pour conclure, il suffit d'observer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est strictement positif, puisque $0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2/ **Calcul de** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Dans cette question, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

➙ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);$$

➙ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$v_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$$

a/ Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$v_n \geqslant 0$".

L'assertion $P(1)$ est vraie d'après l'énoncé (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$, et que $v_n \geqslant 0$ (HR), on en déduit que $v_{n+1} \geqslant 0$. Donc l'assertion $P(n+1)$ est vraie. On a établi l'hérédité de la propriété (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant 0$

b/ Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{v_n}{2}$".

L'assertion $P(1)$ est vraie puisque $v_1 = 0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Une nouvelle application de la formule de duplication donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1. \qquad \text{D'où : } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1+\dfrac{v_n}{2}}{2} = \dfrac{2+v_n}{4}$ (♡)

Puisque $2+v_n$ est positif (question précédente), et que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est positif (car $0 < \dfrac{\pi}{2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$), on déduit de (♡) que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+v_n}}{2} \qquad \text{soit encore :} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_{n+1}}{2}$$

Cette dernière égalité signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{v_n}{2}$.

Exercice 5 — **(Somme de cos).**

1/ D'après le formulaire de trigo : $\boxed{\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)}$

2/ Soit θ un réel. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$$

a/ On suppose que $\theta=0\ [2\pi]$. Alors : $\forall\,k\in\mathbb{N},\ k\theta=0\ [2\pi]$. Donc : $\forall\,k\in\mathbb{N},\ \cos(k\theta)=1$.

Conclusion. Si $\theta=0\ [2\pi]$, alors : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=n+1$

b/ On suppose à présent que θ est un réel différent de 0 modulo 2π.

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion : "$S_n=\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$".

L'assertion $P(0)$ est vraie puisque $S_0=1=\cos(0)\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Sous cette hypothèse :

$$S_{n+1}=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}+\cos((n+1)\theta)$$

$$\Longleftrightarrow S_{n+1}=\frac{\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\,\theta\right)+\cos((n+1)\theta)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\qquad(\spadesuit)$$

Or, d'après la question 1 :

$$\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\qquad(\clubsuit)$$

et :

$$\cos((n+1)\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\left(-n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right]\qquad(\heartsuit)$$

On déduit de (♣) et (♡) que :

$$\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)+\cos((n+1)\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\right)\right]$$

D'où :

$$\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)+\cos((n+1)\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{n+2}{2}\,\theta\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\qquad(\diamondsuit)$$

D'après (♠) et (♢) :

$$S_{n+1}=\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\times\frac{\sin\left(\dfrac{n+2}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

Ce qui signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

Conclusion. Soit θ un réel tel que $\theta\neq 0\ [2\pi]$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

3/ On suppose dans cette question que θ est un réel différent de 0 modulo π. Alors :

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1+\cos(2k\theta)}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}1+\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)\right]$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n}1=n+1\text{ et d'après la question précédente : }\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)=\cos(n\theta)\times\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Conclusion. $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=\frac{1}{2}\left(n+1+\cos(n\theta)\times\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right)$

Enfin :

$$U_n+T_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)+\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)+\sin^2(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$$

Il s'ensuit que : $T_n=n+1-U_n$.

Conclusion. $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k\theta)=\frac{1}{2}\left(n+1-\cos(n\theta)\times\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right)$