Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}4 — 16 octobre 2021

➤ *La durée du devoir est de 2 heures, les calculatrices sont interdites.*

➤ *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 6 exercices.*

➤ *N'oubliez pas :*
- *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
- *d'accorder du soin à la présentation, et à votre rédaction (n'oubliez pas les quantificateurs, soyez précis dans votre argumentation).*

Barème : Ex1 : 3pts — Ex2 : 3pts — Ex3 : 4pts — Ex4 : 3pts — Ex5 : 3pts

Ex6 : 7pts — (Ex7 : hors-barème) Total : 23pts

Exercice 1 — (Somme) Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \, k$$

Exercice 2 — (Application de la linéarisation à une équation)
Dans cet exercice, θ désigne un nombre réel.

1/ Linéariser $\cos^4(\theta)$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\textbf{(E)} \qquad 8\cos^4(\theta) - \cos(4\theta) - 1 = 0$$

Exercice 3 — (Dérivées n-èmes)

1/ Pour tout réel x, on pose : $f(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x}$$

où P_n est un polynôme du second degré à préciser.

2/ On note g la fonction logarithme népérien, soit : $\forall x > 0,\ g(x) = \ln(x)$. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

Exercice 4 — (Inéquation). Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$\sqrt{x}^{\,2x^2-4x} < x^{2x+8}$$

Exercice 5 — (Equation complexe). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 + z^4 - 2 = 0$$

Exercice 6 — (Etude d'une fonction).

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1/ Etude de la fonction f.

a/ Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $f' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.

b/ En déduire le tableau de variation de f, et préciser les limites aux bornes de f.

c/ Soit y un réel strictement compris entre -1 et 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = y$

2/ Etude d'une autre fonction.

On définit sur $I = \,]-1, 1[$ une fonction g en posant :

$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\ g(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

a/ Etablir que g est impaire.

b/ On admet que g est dérivable sur I. Etablir que : $\forall x \in I,\quad g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

c/ Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$.

Exercice 7 — (“Bonus”).

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Montrer que u_n admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, et préciser cette limite.