Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}4 — 16 octobre 2021

Exercice 1 — (Somme) Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a (en décomposant S_n comme la somme des termes de rang pair et la somme des termes de rang impair, comme dans le DM) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k}\, 2k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} (2k+1)$$

D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = -\sum_{k=0}^{n} 1 = -(n+1)$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k = -(n+1)$

Exercice 2 — (Application de la linéarisation à une équation)

Dans cet exercice, θ désigne un nombre réel.

1/ Linéariser $\cos^4(\theta)$.

Soit θ un réel. Selon la formule d'Euler pour le cos, on a :

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6\right)$$

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) = \dfrac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right)$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\textbf{(E)} \qquad 8\cos^4(\theta) - \cos(4\theta) - 1 = 0$$

Soit θ un réel. Selon la question précédente :

$$8\cos^4(\theta) - \cos(4\theta) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3 - \cos(4\theta) - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 4\cos(2\theta) + 2 = 0 \Longleftrightarrow \cos(2\theta) = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2\theta = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}\ [\pi]$$

Conclusion. $[8\cos^4(\theta) - \cos(4\theta) - 1 = 0] \Longleftrightarrow \left[\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ [\pi]\right]$

Exercice 3 — (Dérivées n-èmes)

1/ Pour tout réel x, on pose : $f(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x}$$

où P_n est un polynôme du second degré à préciser.

Pour tout réel x, posons : $g(x) = x^2 + x$ et $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ selon les théorèmes généraux. On peut donc légitimement appliquer la formule de Leibniz pour affirmer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \qquad (\spadesuit)$$

Or pour tout réel x on a :

$$g^{(0)}(x) = x^2 + x\,; \quad g^{(1)}(x) = 2x + 1\,; \quad g^{(2)}(x) = 2\,; \quad \text{et pour tout entier } k \geq 3 : g^{(k)}(x) = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Par ailleurs, pour tout réel x et pour tout entier naturel K on a :

$$h^{(K)}(x) = (-1)^K \mathrm{e}^{-x} \qquad (\heartsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \left(x^2 + x\right)(-1)^n\,\mathrm{e}^{-x} + n(2x+1)\,(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} + n(n-1)\,(-1)^{n-2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

En factorisant par e^{-x}, et en observant que $(-1)^{n-1} = -(-1)^n$ et $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, on en déduit que :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(-1)^n\left[x^2 + x - n(2x+1) + n(n-1)\right] = \mathrm{e}^{-x}\,(-1)^n\left[x^2 + (1-2n)x + n(n-2)\right]$$

Conclusion. $\forall\,(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} P_n(x)$ avec $P_n(x) = (-1)^n\left[x^2 + (1-2n)x + n(n-2)\right]$

2/ On note g la fonction logarithme népérien, soit : $\forall\, x > 0,\ g(x) = \ln(x)$. Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{P}(n)$ l'assertion : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$.

➤ **Initialisation.** Pour tout réel $x > 0$: $g^{(1)}(x) = g'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{(-1)^{1+1} \times 0!}{x^1}$.

L'assertion $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité.** Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

Selon les théorèmes généraux, $g^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left[g^{(n)}\right]'(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)! \times (-nx^{n-1})}{(x^n)^2}$$

Par suite :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+2} n! x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{(-1)^{n+2} n!}{x^{n+1}}$$

Ce qui établit que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$

EXERCICE 4 — **(INÉQUATION).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$\sqrt{x}^{\,2x^2-4x} < x^{2x+8}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x}^{\,2x^2-4x} < x^{2x+8} \\
\iff\ & \mathrm{e}^{\left(2x^2-4x\right)\ln\left(\sqrt{x}\right)} < \mathrm{e}^{(2x+8)\ln(x)} && \boxed{a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}} \\
\iff\ & (2x^2-4x)\ln\left(\sqrt{x}\right) < (2x+8)\ln(x) && \boxed{\text{stricte croissance de } \ln} \\
\iff\ & (x^2-2x)\ln(x) < (2x+8)\ln(x) && \boxed{\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)} \\
\iff\ & (x^2-4x-8)\ln(x) < 0
\end{aligned}$$

Etudions le signe de $P(x) = x^2 - 4x - 8$. C'est un polynôme du second degré, dont le discriminant est $\Delta = 48 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$. Il possède donc deux racines réelles : $2 + 2\sqrt{3}$ (qui est strictement supérieure à 1) et $2 - 2\sqrt{3}$ (strictement négative).

On en déduit le tableau de signes ci-dessous (dans lequel on a noté $\Pi(x) = (x^2 - 4x - 8)\ln(x)$) :

x	0		1		$2+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$P(x)$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$\Pi(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion. $\left[\sqrt{x}^{\,2x^2-4x} < x^{2x+8}\right] \Longleftrightarrow \left[x \in \left]1, 2+2\sqrt{3}\right[\right]$

Exercice 5 — (Equation complexe). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 + z^4 - 2 = 0$$

Via le changement de variable $Z = z^4$, l'équation se réécrit : $Z^2 + Z - 2 = 0 \Longleftrightarrow (Z-1)(Z+2) = 0$.

On en déduit que pour un nombre complexe z on a :

$$\left[z^8 + z^4 - 2 = 0\right] \Longleftrightarrow \left[z^4 = 1 \text{ ou } z^4 = -2\right]$$

Or : $z^4 = 1 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{U}_4 = \left\{\mathrm{i}^k,\ k \in [\![\, 0, 3\,]\!]\right\}$.

Et : $z^4 = -2 \Longleftrightarrow z^4 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![\, 0, 3\,]\!],\ z = 2^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{i}^k$

Conclusion. $\left[z^8 + z^4 - 2 = 0\right] \Longleftrightarrow \left[z \in \mathbb{U}_4 \cup \left\{2^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{i}^k,\ k \in [\![\, 0, 3\,]\!]\right\}\right]$

Exercice 6 — (Etude d'une fonction).

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1/ Etude de la fonction f.

a/ Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $f' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ selon les théorèmes généraux, et : $f' = \dfrac{\mathrm{sh}'\mathrm{ch} - \mathrm{sh}\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}^2} = \dfrac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2}$.

Or : $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique).

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $f' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$

b/ En déduire le tableau de variation de f, et préciser les limites aux bornes de f.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

Par ailleurs, pour tout réel x on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Enfin, on peut observer que f est impaire (son ensemble de définition est symétrique par rapport à zéro, et f est le quotient de deux fonctions de parité opposée). D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

c/ Soit y un réel strictement compris entre -1 et 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = y$

Soit y un réel strictement compris entre -1 et 1, et soit x un réel. On a :

$$f(x) = y \iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$$

$$\iff e^x(1-y) = (1+y)e^{-x} \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

Il reste à observer que pour tout réel y strictement compris entre -1 et 1, on a : $\frac{1+y}{1-y} > 0$. On en déduit que :

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \iff x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$$

Conclusion. $[f(x) = y] \iff \left[x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\right]$

2/ Etude d'une autre fonction.

On définit sur $I =]-1,1[$ une fonction g en posant :

$$\forall x \in \ ]-1,1[\,, \ g(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

a/ Etablir que g est impaire.

La fonction g est définie sur I, qui est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel $x \in I$ on a :

$$g(x) + g(-x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \ln(1) = 0$$

Conclusion. La fonction g est impaire.

b/ On admet que g est dérivable sur I. Etablir que : $\forall\, x \in I, \quad g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Pour tout réel x dans I, on a :

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

On en déduit que pour tout réel x dans I, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right]$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\, x \in I, \quad g'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

c/ Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$.

Les fonctions f et g sont dérivables en 0 ; elles admettent donc l'une et l'autre un développement limité à l'ordre 1 en 0.

Pour tout réel x "proche de 0"*, on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = g(0) + g'(0)x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$$

Or selon les questions précédentes, on a : $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 1$.

On en déduit que :

$$f(x) = x + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x + x\varepsilon_2(x)}{x + x\varepsilon_1(x)} = \frac{1+\varepsilon_2(x)}{1+\varepsilon_1(x)}$$

On en déduit que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1}$

*. On peut par exemple prendre x dans $]-1,1[$.

Exercice 7 — $\boxed{\text{("Bonus").}}$
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\dbinom{n}{k}}$$

Montrer que u_n admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, et préciser cette limite.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} + \sum_{k=n-1}^{n} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1$$

Ainsi :

$$u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} \qquad (\spadesuit)$$

Montrons que v_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

A cette fin, on peut étudier le sens de variation de $w_k = \dbinom{n}{k}$. On a :

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{\dbinom{n}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} = \frac{n!k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

On en déduit que :

$$w_{k+1} \geqslant w_k \Longleftrightarrow n-k \geqslant k+1 \Longleftrightarrow k \leqslant \frac{n-1}{2}$$

On en déduit que la suite des coefficients binomiaux $w_k = \dbinom{n}{k}$ est croissante tant que le rang k est inférieur à $\dfrac{n-1}{2}$ (décroissante ensuite). En particulier :

$$\forall\, k \in [\![\, 2, n-2 \,]\!],\ \binom{n}{2} \leqslant \binom{n}{k}$$

D'où : $\forall\, k \in [\![\, 2, n-2\,]\!],\ \dfrac{1}{\dbinom{n}{k}} \leqslant \dfrac{1}{\dbinom{n}{2}}$

Par suite : $\forall\, k \in [\![\, 2, n-2\,]\!],\ \dfrac{1}{\dbinom{n}{k}} \leqslant \dfrac{2}{n(n-1)}$

Il s'ensuit que :

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \qquad \text{soit :} \qquad 0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} \leqslant \frac{n-3}{n(n-1)}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-3}{n(n-1)} = 0$. On en déduit (avec l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes) que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \quad (\clubsuit).$$

$$\boxed{\text{D'après } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit), \text{ on a : } \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\dbinom{n}{k}} \right) = 2}$$