# Devoir surveillé de Mathématiques n$^0$5 — 13 novembre 2021

- *La durée du devoir est de l'ordre de* $10^2$ *minutes, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages.*
- *N'oubliez pas :*
  — *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
  — *d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction.*

**Barème indicatif :**

**Ex1 : 2pts — Ex2 : 4pts — Ex3 : 5pts — Ex4 : 7pts (3pts+4pts) — Ex5 : 5pts**

---

## Exercice 1 — (Ca-deau !).

Dans cet exercice, on note $E = \{3k,\ k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 3.

Prouver que l'ensemble $E$ est dénombrable.

## Exercice 2 — (Application).

1/ Soit $b$ un nombre complexe. On considère l'application

$$T_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{array}$$

Etablir que $T_b$ est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

2/ On considère à présent l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} + 2 + 3\mathrm{i} \end{array}$$

a/ Montrer que $f = g \circ h$, où $g$ et $h$ sont deux bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

b/ Déduire de ce qui précède que $f$ est bijective, et préciser sa bijection réciproque $f^{-1}$.

## Exercice 3 — (Fonctions circulaires réciproques).

1/ **Question de cours.** Rappeler “tout” ce que vous connaissez sur la fonction arccosinus : tableau de variation, intervalle de dérivabilité et formule de la dérivée, développement limité à l'ordre 1 en 0 (*aucune démonstration n'est demandée dans cette question*).

2/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$$

3/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\arctan(\mathrm{sh}(x))| = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$$

**Exercice 4 — (Arctangente, somme et Python).**

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left( S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

1/ **Calcul de la limite de** $(S_n)$.

a/ Etablir que pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n$ on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

b/ En déduire que pour tout $n$ entier naturel on a :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

2/ **Python : calculs des sommes** $S_n$.

a/ Ecrire une fonction $F(N)$ qui reçoit comme paramètre un entier $N$, et qui retourne la valeur de $S_N$.

b/ Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de saisir un entier $N$, et qui affiche la liste

$$L = [S_0, S_1, \ldots, S_N].$$

**Exercice 5 — (Applications et parties).** Soit $E$ un ensemble quelconque.

A toute partie $A$ de $E$, on associe une application notée $\varphi_A \in \{0,1\}^E$, définie par :*

$$\begin{aligned} \varphi_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto 1 \text{ si } x \in A, \; 0 \text{ si } x \notin A \end{aligned}$$

1/ Soit $A$ une partie de $E$. Montrer que :

$$\varphi_{E \setminus A} = \varphi_E - \varphi_A$$

*Indication - Il s'agit donc d'établir que :* $\forall x \in E, \; \varphi_{E\setminus A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

2/ Pour toute application $\varphi \in \{0,1\}^E$, on note $\varphi^{-1}(\{1\})$ l'ensemble des antécédents de 1 par $\varphi$.

Déterminer les ensembles $\varphi_\emptyset^{-1}(\{1\})$ et $\varphi_E^{-1}(\{1\})$.

3/ Montrer que les ensembles $\mathscr{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont équipotents.

*. On rappelle que la notation $\{0,1\}^E$ désigne l'ensemble des applications de $E$ dans $\{0,1\}$.