Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}5 — 13 novembre 2021

Exercice 1 — (Ca-deau !).

Dans cet exercice, on note $E = \{3k,\ k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 3.

Prouver que l'ensemble E est dénombrable.

L'application $f : k \in \mathbb{N} \longmapsto 3k \in E$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans E, par exemple car on vérifie immédiatement que l'application $g : n \in E \longmapsto \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$ est telle $g \circ f = \mathrm{id}_N$ et $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

Donc $\mathbb{N}$ et E sont équipotents, ce qui signifie par définition que $\boxed{\text{l'ensemble } E \text{ est dénombrable}}$.

Exercice 2 — (Application).

1/ Soit b un nombre complexe. On considère l'application

$$T_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}$$

Etablir que T_b est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

Soient z et Z deux complexes. On a :

$$[z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } T_b] \Longleftrightarrow [T_b(z) = Z] \Longleftrightarrow [z + b = Z] \Longleftrightarrow [z = Z - b]$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par T_b (qui est $Z - b$).

Conclusion. L'application T_b est bijective et sa bijection réciproque est l'application T_{-b}.

2/ On considère à présent l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} + 2 + 3\mathrm{i} \end{array}$$

a/ Montrer que $f = g \circ h$, où g et h sont deux bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Notons que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = T_{2+3\mathrm{i}}(\overline{z})$.

Il s'ensuit que $f = g \circ h$, où $g = T_{2+3\mathrm{i}}$ et $h : z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$. L'application g est bijective d'après la question précédente, et l'application h est une (célèbre) involution du cours.

Conclusion. $f = g \circ h$, avec $g = T_{2+3\mathrm{i}}$ et h la conjugaison complexe (qui sont des bijections).

b/ Déduire de ce qui précède que f est bijective, et préciser sa bijection réciproque f^{-1}.

D'après le cours f est bijective car la composée de deux bijections est bijective et :

$$f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} = h \circ T_{-2-3\mathrm{i}}$$

Explicitement, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f^{-1}(z) = (h \circ T_{-2-3\mathrm{i}})(z) = h(T_{-2-3\mathrm{i}}(z)) = h(z-2-3\mathrm{i}) = \overline{z-2-3\mathrm{i}} = \overline{z} - 2 + 3\mathrm{i}$$

Conclusion. f est bijective, et : $\forall z \in \mathbb{C},\ f^{-1}(z) = \overline{z-2-3\mathrm{i}} = \overline{z} - 2 + 3\mathrm{i}$

Exercice 3 — (Fonctions circulaires réciproques).

1/ **Question de cours.** Rappeler “tout” ce que vous connaissez sur la fonction arccosinus : tableau de variation, intervalle de dérivabilité et formule de la dérivée, développement limité à l'ordre 1 en 0 (*aucune démonstration n'est demandée dans cette question*).

La fonction arccos réalise une bijection strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. Elle n'est dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, et : $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos étant en particulier dérivable en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

2/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) - \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$.

La fonction f est en particulier définie sur $\mathbb{R}_+$, et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} - \frac{-(-\mathrm{sh}(x))}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)-1}}$$

Or pour tout réel x positif, on a :

$$1+\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x),\ \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{ch}(x) \text{ et } \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1} = \sqrt{\mathrm{sh}^2(x)} = |\mathrm{sh}(x)| = \mathrm{sh}(x).$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \frac{1}{\text{ch}(x)} = 0$$

Il s'ensuit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque de plus f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+$, égale à $f(0) = \arctan(0) - \arccos(1) = 0$.

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(\text{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch}(x)}\right)$

3/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\arctan(\text{sh}(x))| = \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$$

Les fonctions $x \in \mathbb{R} \longmapsto |\arctan(\text{sh}(x))|$ et $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch}(x)}\right)$ sont paires, et coïncident sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\arctan(\text{sh}(x))| = \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch}(x)}\right)$

Exercice 4 — (Arctangente, somme et Python).

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left(S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

1/ **Calcul de la limite de** (S_n).

a/ Etablir que : $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} + (-1)^{n+1}\, \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

Soient x un réel et n un entier naturel quelconques. Notons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k}$ est donc une somme géométrique, dont la raison $(-x^2)$ est différente de 1 (pour toute valeur du réel x). On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\, \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Conclusion. $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} + (-1)^{n+1}\, \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

b/ En déduire que pour tout n entier naturel on a : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

En intégrant sur $[0,1]$ la relation de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\right] \mathrm{d}x$$

$$\iff [\arctan(x)]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\iff [\arctan(x)]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Remarque *: on peut déduire de ce dernier résultat que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ *(mais ce n'est pas demandé dans ce devoir). Les sommes* S_n *constituent donc des approximations rationnelles du réel* $\dfrac{\pi}{4}$.

En outre, ces sommes sont simples à calculer, même si c'est un peu laborieux pour un être humain. Il est donc préférable de déléguer ces calculs à la machine, d'où la question suivante.

2/ **Python : calculs des sommes S_n.**

a/ Ecrire une fonction $F(N)$ qui reçoit comme paramètre un entier N, et qui retourne la valeur de S_N.

Une solution.

```
def F(N):
        Som =0 # On initialise la somme à 0
        for k in range(2*n+2):
                Som =Som +((-1)**k)/(2*k+1)
        return Som
```

b/ Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de saisir un entier N, et qui affiche la liste

$$L = [S_0, S_1, \ldots, S_N].$$

Une solution.

```
print('Choisissez un entier')
N =int(input())
print( [ F(n) for n in range(N+1) ])
```

Exercice 5 — (Applications et parties). Soit E un ensemble quelconque.

A toute partie A de E, on associe une application notée $\varphi_A \in \{0,1\}^E$, définie par : *

$$\begin{aligned} \varphi_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto 1 \text{ si } x \in A, 0 \text{ si } x \notin A \end{aligned}$$

1/ Soit A une partie de E. Montrer que :

$$\varphi_{E\setminus A} = \varphi_E - \varphi_A$$

Indication - Il s'agit donc d'établir que : $\forall x \in E,\ \varphi_{E\setminus A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

Soit x un élément de E.

Si $x \in A$, alors $1 - \varphi_A(x) = 0$ et $\varphi_{\bar{A}}(x) = 0$ (puisqu'alors $x \notin \bar{A}$).

Sinon, on a $x \notin A$ d'où $1 - \varphi_A(x) = 1$ et $\varphi_{\bar{A}}(x) = 1$.

Conclusion. $\forall x \in E,\ \varphi_{\bar{A}}(x) = 1 - \varphi_A(x)$, soit : $\varphi_{\bar{A}} = \varphi_E - \varphi_A$

2/ Pour toute application $\varphi \in \{0,1\}^E$, on note $\varphi^{-1}(\{1\})$ l'ensemble des antécédents de 1 par φ.

Déterminer les ensembles $\varphi_\emptyset^{-1}(\{1\})$ et $\varphi_E^{-1}(\{1\})$.

On a : $\boxed{\varphi_\emptyset^{-1}(\{1\}) = \{x \in E, \quad \varphi_\emptyset(x) = 1\} = \emptyset \text{ et } \varphi_E^{-1}(\{1\}) = E}$

3/ Montrer que les ensembles $\mathscr{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont équipotents.

Une méthode possible consiste à vérifier que les applications

$$\begin{aligned} F : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \{0,1\}^E \\ A &\longmapsto \varphi_A \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} G : \{0,1\}^E &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

sont réciproques l'une de l'autre et donc bijectives.

*. On rappelle que la notation $\{0,1\}^E$ désigne l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.