

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N^o6 — 4 DÉCEMBRE 2021

- La durée du devoir est approximativement de 4h, les calculatrices sont interdites.
- Le sujet est rédigé sur 4 pages.
- N'oubliez pas :
 - de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;
 - d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction.

Barème indicatif :

Ex1 : 6pts — Ex2 : 4pts — Ex3 : 3pts — Ex4 : 5pts — Pb1 : 24pts — Pb2 : 12pts

EXERCICE 1 — (EDL D'ORDRE 1)

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ty' + (t-1)y = t^3 & (\text{E}) \\ y(1) = \frac{2}{e} \end{cases}$$

EXERCICE 2 — (INTÉGRALE)

Dans cet exercice, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{2\pi} \cos(t) e^{-nt} dt$$

- 1/ Calculer I_n pour tout entier naturel n .
- 2/ Déterminer la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 — (APPLICATION). Soit b un nombre complexe. On considère l'application

$$\begin{aligned} S_b : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -z + b \end{aligned}$$

Etablir que S_b est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

EXERCICE 4 — (INÉQUATION). Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{(2x^2)} > (\sqrt{x})^{9x-2}$$

Problème 1 — Intégrales de Wallis et formule de Stirling

L'objet de ce problème est de trouver un équivalent α_n de $n!$, c-à-d une suite (α_n) dont le terme général est tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\alpha_n} = 1$$

► PARTIE A - Un premier pas

On définit trois suites réelles S , u et v en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$\text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, v_n = e^{1-S_{n-1}}$$

Soit n un entier naturel non nul.

1/ a/ Etablir que :
$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{2(n-t)+1}{2t} dt$$

b/ En déduire que :
$$u_n = \int_0^1 \frac{1-2u}{2(n+u)} du$$

Pour la seconde formule, on utilisera un changement de variable très simple.

2/ On pose : $r_n = \int_0^{1/2} \frac{1-2u}{2(n+u)} du$ et $t_n = \int_{1/2}^1 \frac{2u-1}{2(n+u)} du$.

a/ A l'aide du sens de variation de $u \mapsto \frac{1}{n+u}$, établir les encadrements suivants :

$$\frac{1}{4(2n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{8n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{8(n+1)} \leq t_n \leq \frac{1}{4(2n+1)}$$

b/ En déduire un encadrement de u_n , puis montrer que la suite (S_n) est majorée par $\frac{1}{8}$.

c/ En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

3/ a/ Montrer que :

$$S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$$

b/ En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

c/ A partir de l'expression de v_n , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\ell n^n e^{-n} \sqrt{n}} = 1$$

► PARTIE B - Intégrales de Wallis, et détermination de ℓ

Pour tout entier naturel n , on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

Au besoin, on pourra utiliser sans démonstration au cours de cette partie la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.

4/ Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

5/ Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

6/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

7/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

8/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$(n+1) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}.$$

9/ Etablir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

10/ Etablir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 = 1$$

11/ A l'aide du résultat de la question 3-c, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n} \ell \sqrt{2n}}{\pi} = 1$$

12/ En déduire la valeur de ℓ .

Problème 2 — Étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie I — Généralités

On considère la fonction f définie que $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt.$$

1/ Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2/ Préciser le signe de f .

3/ À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

4/ On pose pour tout réel $x > 0$,

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

Justifier que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Déterminer l'expression de F' .

5/ En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que f est solution d'une équation différentielle de la forme

$$y'(x) + y(x) = \beta(x)$$

où β désigne une fraction rationnelle (*i.e.* le quotient de deux polynômes) que l'on explicitera.

6/ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = - \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt.$$

7/ Déduire de la question précédente le sens de variation de la fonction f .