Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}6 — 4 décembre 2021

Exercice 1 — (EDL d'ordre 1)

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} ty' + (t-1)y = t^3 & \textbf{(E)} \\ y(1) = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \end{cases}$

Commençons par résoudre l'équation différentielle (E).

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H) $xy' + (x-1)y = 0$ l'équation homogène associée à (E). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x - \ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale de (H) est $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(x)-x}$

soit encore $\boxed{f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto Cx\mathrm{e}^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})}$.

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète** (avec second membre).

On peut utiliser la **méthode de variation de la constante**, c'est-à-dire que l'on cherche une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = C(x)x\mathrm{e}^{-x}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = C'(x)x\mathrm{e}^{-x} + C(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}\right)$

C'est-à-dire : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = C'(x)x\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x}(1-x)$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'_P(x) + (x-1)\,f_P(x) = C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{C(x)\mathrm{e}^{-x}x\,(1-x) + C(x)\mathrm{e}^{-x}x\,(x-1)}_{=0}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xf'_P(x) + (x-1)\,f_P(x) = C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x}$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} = x^3, \text{ soit : } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = x\mathrm{e}^{x}$$

Il reste donc à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$, *via* une intégration par parties :

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x-1) \text{ donc : } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$$

$\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est donc } f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\,(x-1)}$.

➤ D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x(x-1) + Cx\mathrm{e}^{-x} \quad (C \in \mathbb{R}) \text{ c'est-à-dire } \boxed{f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\left(x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}\right) \quad (C \in \mathbb{R})}$$

➤ Il reste à déterminer la valeur de C en utilisant la “condition initiale” donnée dans l'énoncé. Explicitement :

$$\left[f(1) = \frac{2}{\mathrm{e}}\right] \Longleftrightarrow \left[C\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\right] \Longleftrightarrow [C = 2]$$

Conclusion. Le problème de Cauchy de l'énoncé possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x(x-1) + 2x\mathrm{e}^{-x} \text{ c'est-à-dire}$$

EXERCICE 2 — **(INTÉGRALE)**

Dans cet exercice, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{2\pi} \cos(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

1/ Calculer I_n pour tout entier naturel n.

Soit n un entier naturel. On a :

$$I_n = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-n)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-n}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-n)t}\right]_0^{2\pi}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-n}\left(\mathrm{e}^{-2n\pi} - 1\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{n-\mathrm{i}}\left(1 - \mathrm{e}^{-2n\pi}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{n+\mathrm{i}}{n^2+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-2n\pi}\right)\right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n^2+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-2n\pi}\right)$

2/ Déterminer la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

D'une part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-2n\pi}\right) = 1$. D'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3 — (Application). Soit b un nombre complexe. On considère l'application

$$\begin{aligned} S_b : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -z+b \end{aligned}$$

Etablir que S_b est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

Soit $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$[z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } S_b] \Longleftrightarrow [S_b(z) = Z] \Longleftrightarrow [-z+b = Z] \Longleftrightarrow [z = -Z+b]$$

On déduit de ce raisonnement que tout complexe Z admet un unique antécédent par S_b, qui est $-Z+b$, c'est à dire $S_b(Z)$.

Conclusion. S_b est bijective, et $S_b^{-1} = S_b$ (S_b est une involution).

Exercice 4 — (Inéquation). Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}$$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2 \ln(x)} > \mathrm{e}^{(9x-2)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2 \ln(x)} > \mathrm{e}^{(9x-2)\ln(x)/2}$

$$\Longleftrightarrow 2x^2 \ln(x) > \frac{9x-2}{2} \ln(x) \Longleftrightarrow 4x^2 \ln(x) > (9x-2)\ln(x)$$

D'où, en résumé : $\boxed{x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2} \Longleftrightarrow (4x^2 - 9x + 2)\ln(x) > 0 \qquad (\spadesuit)}$

Reste donc à utiliser la méthode standard pour étudier le signe d'un produit : dresser un tableau de signes. Celui de $\ln(x)$ est connu, seul celui du polynôme du second degré mérite d'être un peu détaillé.

Le polynôme $4x^2 - 9x + 2$ a pour discriminant 49, et on en déduit qu'il a deux racines réelles : $\dfrac{9+7}{8} = 2$ et $\dfrac{9-7}{8} = \dfrac{1}{4}$. On en déduit le tableau ci-dessous (dans lequel on a noté $\Pi(x) = (4x^2 - 9x + 2)\ln(x)$) :

x	0		$1/4$		1		2		$+\infty$
$\ln(x)$	‖		$-$		0		$+$		
$4x^2-9x+2$	‖	$+$	0		$-$		0	$+$	
$\Pi(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

De ce tableau de signes, et de ($\spadesuit$) on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\left]\frac{1}{4}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[}$

Problème 1 — Intégrales de Wallis et formule de Stirling

L'objet de ce problème est de trouver un équivalent α_n de $n!$, càd une suite (α_n) dont le terme général est tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\alpha_n} = 1$$

➤ Partie A - Un premier pas

On définit trois suites réelles S, u et v en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$\text{et : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ v_n = \mathrm{e}^{1-S_{n-1}}$$

Soit n un entier naturel non nul.

1/ a/ Etablir que : $\quad u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{2\,(n-t)+1}{2t}\,\mathrm{d}t$

On a :

$$\int_n^{n+1} \frac{2\,(n-t)+1}{2t}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} -1 + \frac{2n+1}{2t}\,\mathrm{d}t = -1 + \frac{2n+1}{2}\left[\ln(t)\right]_n^{n+1}$$

$$= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln\left(n+1\right) - \ln(n)\right)$$

D'où : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{2\,(n-t)+1}{2t}\,\mathrm{d}t = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Par suite : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{2\,(n-t)+1}{2t}\,\mathrm{d}t}$.

b/ En déduire que : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-2u}{2\,(n+u)}\,\mathrm{d}u$

Dans l'intégrale précédente, on procède au changement de variable : $t = n+u$. Lorsque t varie de n à $(n+1)$, $u = t-n$ varie de 0 à 1 et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. On en déduit grâce à la formule du changement de variable que :

$$\int_n^{n+1} \frac{2\,(n-t)+1}{2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-2u+1}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-2u}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-2u}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u}$.

2/ On pose : $r_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1-2u}{2\,(n+u)}\,\mathrm{d}u$ et $t_n = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{2u-1}{2\,(n+u)}\,\mathrm{d}u$.

a/ A l'aide du sens de variation de $u \longmapsto \dfrac{1}{n+u}$, établir les encadrements suivants :

$$\frac{1}{4\,(2n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{8n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{8\,(n+1)} \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{4\,(2n+1)}$$

La fonction $n \longmapsto \dfrac{1}{n+u}$ est décroissante sur $[0,1]$. Or une fonction décroissante sur un segment $[a,b]$ atteint son maximum en a, et son minimum en b. On en déduit que :

$$\left[\begin{array}{ll} \forall\, u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ \dfrac{1}{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{2\,(n+u)} \leqslant \dfrac{1}{2n} & (\spadesuit) \\[2ex] \forall\, u \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right],\ \dfrac{1}{2\,(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{2\,(n+u)} \leqslant \dfrac{1}{2n+1} & (\clubsuit) \end{array}\right.$$

➤ Soit u un réel dans $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On a alors : $(1-2u) \geqslant 0$. D'où, grâce à $(\spadesuit)$:

$$\forall\, u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad \frac{1-2u}{2n+1} \leqslant \frac{1-2u}{2\,(n+u)} \leqslant \frac{1-2u}{2n}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient en intégrant terme à terme cet encadrement :

$$\frac{1}{2n+1}\int_0^{1/2} 1-2u\,\mathrm{d}u \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}\int_0^{1/2} 1-2u\,\mathrm{d}u$$

Or : $\displaystyle\int_0^{1/2} 1-2u\,\mathrm{d}u = \left[u-u^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$. Donc : $\dfrac{1}{2n+1} \times \dfrac{1}{4} \leqslant r_n \leqslant \dfrac{1}{2n} \times \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Ainsi :} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{4\,(2n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{8n} \qquad (\heartsuit)}$$

➤ Soit u un réel dans $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. On a alors : $(2u-1) \geqslant 0$. D'où, grâce à $(\clubsuit)$:

$$\forall\, u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \qquad \frac{2u-1}{2\,(n+1)} \leqslant \frac{2u-1}{2\,(n+u)} \leqslant \frac{2u-1}{2n+1}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient en intégrant terme à terme cet encadrement :

$$\frac{1}{2\,(n+1)}\int_{1/2}^{1} 2u-1\,\mathrm{d}u \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2n+1}\int_{1/2}^{1} 2u-1\,\mathrm{d}u$$

Or : $\displaystyle\int_{1/2}^{1} 2u-1\,\mathrm{d}u = \left[u^2-u\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{4}$. Donc : $\dfrac{1}{2\,(n+1)} \times \dfrac{1}{4} \leqslant t_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1} \times \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Ainsi :} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{8\,(n+1)} \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{4\,(2n+1)} \qquad (\diamondsuit)}$$

b/ En déduire un encadrement de u_n, puis montrer que la suite (S_n) est majorée par $\dfrac{1}{8}$.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{1-2u}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u + \int_{1/2}^{1} \frac{1-2u}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{1/2} \frac{1-2u}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u - \int_{1/2}^{1} \frac{2u-1}{2(n+u)}\,\mathrm{d}u$$

En d'autres termes : $u_n = r_n - t_n$. On déduit de cette remarque et des encadrements ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$) de la question précédente que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}.$$

On en déduit que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

D'où, "télescopiquement" : $S_n \leqslant \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

En particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leqslant \dfrac{1}{8}}$.

c/ En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

La suite (S_n) est croissante (trivial) et majorée (question précédente) : elle est donc convergente. On en déduit immédiatemment que (v_n) converge également.

3/ a/ Montrer que :

$$S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)$$

Prouvons par récurrence sur l'entier naturel non nul n l'assertion :

$$P(n): \quad S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)$$

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = u_1 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$.

D'autre part : $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\ln(1+1) - 1 - \ln(1!) = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$.

Il s'ensuit que $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et montrons que $P(n+1)$ l'est.

On a : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \underbrace{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)}_{=S_n \text{ (hyp. de réc.)}} + \underbrace{\left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) - 1}_{=u_{n+1} \text{ (énoncé)}}$

D'où : $S_{n+1} = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!) + \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+2) - \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) - 1$

$\Longleftrightarrow S_{n+1} = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+2) - (n+1) - \ln(n!) - \ln(n+1)$

$\Longleftrightarrow S_{n+1} = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+2) - (n+1) - \ln((n+1)!)$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)}$.

b/ En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. D'après l'énoncé et la question précédente :

$$v_n = \exp(1 - S_{n-1}) = \exp\left(1 - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n - 1 + \ln((n-1)!)\right) = e^n n^{-n+1/2}(n-1)!$$

Donc : $v_n = \dfrac{e^n\sqrt{n}\,(n-1)!}{n^n} = \dfrac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ v_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}}$.

c/ A partir de l'expression de v_n, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\ell n^n e^{-n}\sqrt{n}} = 1$$

D'après l'énoncé : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\ell} = 1.$ *

On en déduit avec la question précédente que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\ell n^n e^{-n}\sqrt{n}} = 1}$.

➤ Partie B - Intégrales de Wallis, et détermination de ℓ

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.

Au besoin, on pourra utiliser sans démonstration au cours de cette partie la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$.

*. On pouvait admettre que $\ell \neq 0$ à ce point du devoir. En voici toutefois la justification. D'après la question 2, la suite (S_n) admet une limite finie, disons ℓ'. Donc la suite (v_n) converge vers $\ell = e^{1-\ell'}$, qui est non nulle.

4/ Calculer W_0, W_1 et W_2.

$\boxed{W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1}$.

Par ailleurs : $W_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t - \sin(2t)/2\right]_0^{\pi/2}$. Ainsi : $\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$.

5/ Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t$$

Or : $\forall t \in [0, \pi/2],\ \sin^n(t) \geqslant 0$ et $\sin(t) - 1 \leqslant 0$.

On en déduit que : $\forall t \in [0, \pi/2],\ \sin^n(t)\,(\sin(t) - 1) \leqslant 0$.

Par conséquent : $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.

Conclusion. La suite (W_n) est décroissante.

6/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Soit n un entier naturel. On a : $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t$

On pose alors : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = \sin^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ (théorèmes généraux).

Il est donc légitime d'utiliser une intégration par parties pour écrire :

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2(t)\right)\sin^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t$

C'est-à-dire : $W_{n+2} = (n+1)\,W_n - (n+1)\,W_{n+2}$ d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$

7/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n \left(n!\right)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On souhaite établir que la propriété $P(n)$: $\quad W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n \left(n!\right)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : pour $n = 0$, on a d'une part $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et d'autre part $\dfrac{(0)!}{4^0 \left(0!\right)^2} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. La propriété est initialisée.

Hérédité : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n, et montrons que $P(n+1)$ l'est.

On a : $W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \dfrac{(2n)!}{4^n \left(n!\right)^2} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2n+2}{2n+2} \dfrac{2n+1}{2n+2} \dfrac{(2n)!}{4^n \left(n!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$

$$= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} \left((n+1)!\right)^2} \frac{\pi}{2}$$

Ce qui signifie que $P\left(n+1\right)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n \left(n!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}}$

8/ Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\left(n+1\right) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout entier naturel n posons : $u_n = \left(n+1\right) W_{n+1} W_n$. On a : $u_{n+1} = \left(n+2\right) W_{n+2} W_{n+1}$.
Or, d'après la question précédent, on a : $u_{n+1} = \left(n+2\right) \dfrac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1} = \left(n+1\right) W_{n+1} W_n$, soit : $u_{n+1} = u_n$. On en déduit que $\left(u_n\right)$ est constante.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 = W_1 \times W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n+1\right) W_{n+1} W_n = \dfrac{\pi}{2}}$.

9/ Etablir que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

D'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$. Par ailleurs, on a déjà prouvé que la suite $\left(W_n\right)$ est décroissante.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < W_{n+1} \leqslant W_n$. Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.

En outre, puisque la suite $\left(W_n\right)$ est décroissante, on a : $0 < W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.

Il s'ensuit que : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{W_{n+2}}{W_n}$. D'après la question 6, on a donc : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

On déduit de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$

10/ Etablir que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\,(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 = 1$$

Soit n un entier naturel arbitraire. On a :

$$\frac{2\,(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 = \frac{2\,(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 \frac{W_{2n+1}}{W_{2n+1}} = \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[(2n+1)\, W_{2n+1} W_{2n}\right]}_{=\frac{\pi}{2}} \times \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$$

D'où : $\dfrac{2\,(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 = \dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$. Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$.

$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,(2n+1)}{\pi} W_{2n}^2 = 1}$.

11/ A l'aide du résultat de la question 3-c, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = 1$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\frac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \times \frac{\ell\sqrt{2n}}{\pi} \qquad \text{soit : } \frac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{\ell\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \qquad (\spadesuit)$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{\ell\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}} = 1 \quad (\heartsuit) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{((n)!)^2}{\ell^2 n^{2n}\mathrm{e}^{-2n} n} = 1 \quad (\diamondsuit)$$

On écrit donc judicieusement :

$$\frac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = \frac{(2n)!}{\ell\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}} \times \frac{\ell^2 n^{2n}\mathrm{e}^{-2n} n}{(n!)^2} \times \underbrace{\frac{\ell\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{\ell^2 n^{2n}\mathrm{e}^{-2n} n} \times \frac{\ell\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}}_{=1\ \text{(formidable !)}}$$

Ainsi : $\dfrac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = \dfrac{(2n)!}{\ell\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}} \times \dfrac{\ell^2 n^{2n}\mathrm{e}^{-2n} n}{(n!)^2}$.

Il résulte de cette égalité, de $(\heartsuit)$ et de $(\diamondsuit)$ que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{2n}\,\ell\sqrt{2n}}{\pi} = 1}$.

12/ En déduire la valeur de ℓ.

On peut déduire de la question 10 que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \sqrt{2n} \times W_{2n} = 1$.

Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n} \times W_{2n}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. On en déduit, grâce à la question précédente, que : $\boxed{\ell = \sqrt{2\pi}}$.

Remarque. On a ainsi démontré la FORMULE DE STIRLING :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} = 1} \qquad \text{ou encore :} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1}$$

Problème 2 — Étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie I — Généralités

On considère la fonction f définie que $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

1/ Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t+x}$ est continue sur $[0, 1]$.

Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g$ est bien définie.

Conclusion. La fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2/ Préciser le signe de f.

Soit x un réel strictement positif. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t+x}$ est positive sur $[0, 1]$.

Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g$ est positive, par positivité de l'intégrale.

Conclusion. La fonction f est positive sur $]0, +\infty[$.

3/ À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Soit x un réel strictement positif. Dans l'intégrale définissant le réel $f(x)$, on procède au changement de variable : $u = t + x$.

On obtient alors :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u-x}}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{soit} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall x > 0, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u}\,\mathrm{d}u}$

4/ On pose pour tout réel $x > 0$,

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Justifier que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Déterminer l'expression de F'.

La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u/u$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, elle admet une primitive φ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$). Alors :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calculons sa dérivée. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$F'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ et : } \forall x > 0,\ F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}}$

5/ En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que f est solution d'une équation différentielle de la forme

$$y'(x) + y(x) = \beta(x)$$

où β désigne une fraction rationnelle (*i.e.* le quotient de deux polynômes) que l'on explicitera.

D'après les deux questions précédentes, et selon les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u}\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\right)$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -f(x) + \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \text{La fonction } f \text{ est solution de } y' + y = \dfrac{\mathrm{e}}{x+1} - \dfrac{1}{x}.}$

6/ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^t}{t+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{soit :} \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit, avec la question précédente que :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x} - \left(\frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall x > 0, \quad f'(x) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t}$

7/ Déduire de la question précédente le sens de variation de la fonction f.

On déduit de la question précédente que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.