Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}8 — 29 janvier 2022

➤ *La durée du devoir est de 4 heures, les calculatrices sont interdites.*

➤ *Le sujet est rédigé sur 4 pages.*

➤ *N'oubliez pas :*
— *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
— *d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction.*

Exercice 1 — (SRL2 et calcul matriciel).

Dans cet exercice, on considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0\,; \quad u_1 = 3\,; \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

➤ **Première approche - Application du cours.**

1/ En utilisant vos connaissances de cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n.

➤ **Seconde approche - Utilisation du calcul matriciel.**

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

2/ Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

3/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

4/ Calcul des puissances de A. On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a/ Etablir que P est inversible et calculer P^{-1}.

b/ Calculer $D = P^{-1}AP$.

Remarque. On pourra vérifier que D est une matrice diagonale à coefficients entiers.

c/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

5/ Déduire de ce qui précède l'expression de X_n, puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 2 — (Matrices). Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble S de ces matrices, c'est-à-dire :

$$S = \left\{ T(a,b,c)\,,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

➤ **Partie I**.

1/ Montrer que S est un sous-groupe de $M_3(\mathbb{R})$.

2/ **a**/ Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B.

b/ Soient (a,b,c) et (a',b',c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a,b,c)$ et $M' = T(a',b,',c')$.

Calculer le produit MM', et vérifier que $MM' \in S$.

3/ On peut prouver que S est un sous-anneau de $M_3(\mathbb{R})$ (mais on ne demande pas de le faire ici).

Cette question est consacrée à la recherche des éléments inversibles de l'anneau S.

a/ On reprend les notations de la question 2. Calculer, lorsque c'est possible, a', b' et c' en fonction de a, b et c pour que $MM' = \mathrm{I}_3$.

b/ Quels sont les éléments inversibles de l'anneau S ? L'anneau S est-il un corps ?

➤ **Partie II**. Une matrice M est appelée **orthogonale** si $M \times {}^tM = {}^tM \times M = I$.

4/ Montrer M est orthogonale si et seulement si $M^{-1} = {}^tM$.

5/ Soit $M \in S$. Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}$.

6/ En déduire toutes les matrices orthogonales appartenant à S.

➤ **Partie III**. Dans cette partie, on note $K = \dfrac{1}{\sqrt{2}} A$ et $M = T(1, \sqrt{2}, 0)$. On se propose de calculer les puissances de K puis celles de M.

7/ Calculer K^2, K^3 puis K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suivant la parité de n.

8/ Exprimer M à l'aide de I et de K et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I + a_n K + b_n K^2$ avec

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \,\text{impair}} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \,\text{pair}} \binom{n}{k} 2^k$$

9/ Calculer $1 + a_n + b_n$ et $1 - a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

10/ Conclure en exprimant M^n comme combinaison linéaire de I, A et B.

Exercice 3 — (Continuité). Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Une propriété du cours affirme que :

> Si $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Démontrer cette propriété.

➤ **Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle part continue**. On définit une fonction appelée **indicatrice des rationnels**, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, en associant la valeur 1 à tout rationnel, et la valeur 0 à tout irrationnel. Plus formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

2/ Dans cette question, x désigne un nombre rationnel. On **admet** par ailleurs que π est irrationnel.

a/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x + \dfrac{\pi}{2^n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

b/ Justifier brièvement que la suite de terme général $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est convergente, et préciser sa limite.

c/ Déduire de ce qui précède que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x.

3/ Etablir que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel x.

Exercice 4 — (Analyse). On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \textbf{(E)}$$

1/ Questions préliminaires. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ solution de **(E)**.

a/ Etablir que : $f(1) = 0$.

b/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ f\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

c/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.

➤ **Résolution de (E).**

Dans cette partie, on suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solution de (E).

2/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x^n) = nf(x)$.

3/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(\mathrm{e}^n) = nf(\mathrm{e})$.

4/ Etablir que : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\mathrm{e}^{1/q}\right) = \dfrac{1}{q} f(\mathrm{e})$.

5/ Etablir que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(\mathrm{e}^r) = r\, f(\mathrm{e})$.

6/ En déduire finalement que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\mathrm{e}^x) = x\, f(\mathrm{e})$.

7/ Montrer que si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de **(E)**, alors elle sont proportionnelles.[*]

8/ En déduire soigneusement l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ solutions de **(E)**.

Exercice 5 — (Distance dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$).

Soit p un entier naturel non nul.

Pour tout couple de matrices (A, B) de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})^2$, on définit la **distance** entre A et B et on note $\mathrm{d}(A, B)$ le réel positif :

$$\mathrm{d}(A, B) = \max_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2} |b_{ij} - a_{ij}|$$

1/ (Inégalité triangulaire). Etablir que : $\forall\ (A, B, C) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})^3,\ \mathrm{d}(A, C) \leqslant \mathrm{d}(A, B) + \mathrm{d}(B, C)$.

2/ On note S l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ situées à une distance inférieure ou égale à 1 de la matrice identité, c'est à dire :

$$S = \{A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{d}(A, \mathrm{I}_p) \leqslant 1\}$$

a. Justifier que S est une partie de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ qui contient la matrice $0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$.

b. $(S, +)$ est-il un sous-groupe de $(\mathrm{M}_p(\mathbb{R}), +)$?

3/ On note $\mathrm{M}_p(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients rationnels.

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$.

Etablir qu'il existe une suite de matrices $(B_n)_n$ de $\mathrm{M}_p(\mathbb{Q})$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_0] \Longrightarrow [\mathrm{d}(A, B_n) < \varepsilon]$$

4/ On pose $C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi & \sqrt{5} \\ 1 & -3 & \pi^2 \\ \sqrt{7} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Etablir qu'il existe une matrice B de $\mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que : $\mathrm{d}(C, B) \leqslant 10^{-6}$.

---

*. C'est à dire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda g$, ou $g = \lambda f$.