Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}8 — 29 janvier 2022

Exercice 1 — (SRL2 et calcul matriciel).

Dans cet exercice, on considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0\,; \quad u_1 = 3\,; \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

➤ Première approche - Application du cours.

1/ En utilisant vos connaissances de cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Selon l'énoncé, la suite (u_n). L'équation caractéristique qui lui est associée est : $r^2 - r - 2 = 0$. Celle-ci possède deux racines réelles : 1 et -2. On en déduit déjà que :

$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, on a en outre :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \\ -\lambda + 2\mu = 3 \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \\ \mu = 1 \end{array}\right.$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1} + 2^n$

➤ Seconde approche - Utilisation du calcul matriciel.

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

2/ Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

Soit n un entier naturel. Selon l'énoncé :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Conclusion $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Récurrence immédiate sur n.

4/ Calcul des puissances de A. On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a/ Etablir que P est inversible et calculer P^{-1}.

On a : $\det P = 3 \neq 0$.

$\boxed{\text{Donc } P \text{ est inversible, et : } P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

b/ Calculer $D = P^{-1}AP$.

<u>*Remarque.*</u> *On pourra vérifier que D est une matrice diagonale à coefficients entiers.*

Après calculs : $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

c/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Récurrence immédiate (et question de cours de la semaine écoulée).

5/ Déduire de ce qui précède l'expression de X_n, puis celle de u_n en fonction de n.

Soit n un entier naturel. D'après les questions précédentes : $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

On en déduit successivement que :

$$X_n = \frac{1}{3}PD^n \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis :

$$X_n = \frac{1}{3}P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

puis :

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\times(-1)^n \\ 3\times 2^n \end{pmatrix}$$

puis :

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\times(-1)^n + 3\times 2^{n+1} \\ -3\times(-1)^n + 3\times 2^n \end{pmatrix}$$

d'où finalement :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion.}\text{ En particulier : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} + 2^n}$

Exercice 2 — **(Matrices).** Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble S de ces matrices, c'est-à-dire :

$$S = \left\{T(a,b,c)\,,\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

➤ **Partie I** .

1/ Montrer que S est un sous-groupe de $M_3(\mathbb{R})$.

S est une partie de $M_3(\mathbb{R})$, par définition : la condition $(SG1)$ est donc vérifiée.

La matrice nulle appartient à S, puisque $0_{M_3(\mathbb{R})} = T(0,0,0)$: la condition $(SG2)$ est donc vérifiée.

Si M et M' sont deux éléments de S, alors il existe 6 réels a,b,c,a',b',c' tels que $M = T(a,b,c)$ et $M' = T(a',b',c')$. On vérifie alors sans peine que $M + M' = T(a+a', b+b', c+c') \in S$ et $-M = T(-a,-b,-c) \in S$. Les conditions $(SG3)$ et $(SG4)$ sont donc vérifiées.

Conclusion. S est un sous-groupe de $M_3(\mathbb{R})$.

2/ a/ Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + B\,;\qquad B^2 = I\,;\qquad AB = A \quad \text{et} \quad BA = A$

b/ Soient (a,b,c) et (a',b',c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a,b,c)$ et $M' = T(a',b,',c')$.Calculer le produit MM', et vérifier que $MM' \in S$.

On peut observer que : $T(a,b,c) = aI + bA + cB$. Par suite :

$$\begin{aligned} MM' &= (aI + bA + cB)\,(a'I + b'A + c'B) \\ &= aa'I + ab'A + ac'B + a'bA + bb'A^2 + bc'AB + a'cB + b'cBA + cc'B^2 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$MM' = aa'I + ab'A + ac'B + a'bA + bb'\,(I+B) + bc'A + a'cB + b'cA + cc'I$$

d'où :

$$MM' = (aa' + bb' + cc')\,I + (ab' + a'b + bc' + b'c)\,A + (ac' + a'c + bb')\,B$$

En particulier : $MM' = T\,(aa' + bb' + cc', ab' + a'b + bc' + b'c, ac' + a'c + bb')$. D'où : $MM' \in S$.

Conclusion. $\forall\ (a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$,

$$T(a,b,c) \times T(a',b',c') = T\,(aa' + bb' + cc', ab' + a'b + bc' + b'c, ac' + a'c + bb')$$

En particulier, S est une partie de $M_3(\mathbb{R})$ stable par produit.

3/ On peut prouver que S est un sous-anneau de $M_3(\mathbb{R})$ (mais on ne demande pas de le faire ici).

Cette question est consacrée à la recherche des éléments inversibles de l'anneau S.

a/ On reprend les notations de la question 2. Calculer, lorsque c'est possible, a', b' et c' en fonction de a, b et c pour que $MM' = I$.

Avec les notations de la question 2 :

$$MM' = I \iff T\left(aa' + bb' + cc', ab' + a'b + bc' + b'c, ac' + a'c + bb'\right) = T(1,0,0)$$

D'où :

$$MM' = I \iff \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 1 \\ ab' + a'b + bc' + b'c = 0 \\ ac' + a'c + bb' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 1 \\ b(a' + c') + b'(a + c) = 0 \\ ac' + a'c + bb' = 0 \end{cases}$$

$$\dots \iff \begin{cases} a' = \dfrac{a(c+a) - b^2}{\alpha} \\ \\ b' = \dfrac{b(c-a)}{\alpha} \\ \\ c' = \dfrac{b^2 - c(c+a)}{\alpha} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \alpha = c(b^2 - c(c+a)) + a(c(c+a) - b^2) + b(bc - ab)$$

Conclusion. La matrice $T(a,b,c)$ est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$. Lorsque tel est le cas, son inverse est la matrice $T(a', b', c')$, où les scalaires a', b' et c' sont donnés par les expressions ci-dessus.

b/ Quels sont les éléments inversibles de l'anneau S ? L'anneau S est-il un corps ?

Les éléments inversibles de S sont les matrices $T(a,b,c)$ telles que $c(b^2 - c(c+a)) + a(c(c+a) - b^2) + b(bc - ab) \neq 0$.

Il existe donc dans S des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles, comme la matrice $A = T(0,1,0)$ par exemple.

Conclusion. L'anneau S n'est pas un corps.

➤ **PARTIE II** . Une matrice M est appelée **orthogonale** si $M \times {}^tM = {}^tM \times M = I$.

4/ Montrer M est orthogonale si et seulement si $M^{-1} = {}^tM$.

Si $M^{-1} = {}^tM$, alors M est clairement orthogonale. Réciproquement, si M est orthogonale, alors en particulier : $M \times {}^tM = I$. On en déduit que M est inversible et que $M^{-1} = {}^tM$.

Conclusion. M est orthogonale si et seulement si $M^{-1} = {}^tM$

5/ Soit $M \in S$. Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}$.

En notant évidemment $M = T(a,b,c)$, on a : $M \times {}^tM = M^2 = T\left(a^2 + b^2 + c^2, 2b(a+c), b^2 + 2ac\right)$.

Par conséquent :

$$M \text{ est orthogonale} \Longleftrightarrow M \times {}^tM = I \Longleftrightarrow T\left(a^2+b^2+c^2, 2b(a+c), b^2+2ac\right) = T(1,0,0)$$

Conclusion M est orthogonale si et seulement si $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ b^2+2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}$

6/ En déduire toutes les matrices orthogonales appartenant à S.

On distingue deux cas suivant que b est nul ou non (cf dernière ligne du système).

Si $b = 0$, la deuxième ligne entraîne que a ou c est nul. En distinguant ces deux sous-cas, on en déduit que les matrices orthogonales de S avec $b = 0$ sont $T(\pm 1, 0, 0) = \pm I$ et $T(0, 0, \pm 1) = \pm B$.

Si $b \neq 0$, la dernière ligne entraîne que $c = -a$. La deuxième ligne entraîne alors que $b^2 = 2a^2$. On en déduit grâce à la première que : $a = \pm 1/2$. Par suite, les matrices orthogonales de S avec $b \neq 0$ sont $T(1/2, \pm\sqrt{2}/2, -1/2)$ et $T(-1/2, \pm\sqrt{2}/2, 1/2)$.

Conclusion Il existe exactement 8 matrices orthogonales dans S :

$$\pm I,\ \pm B,\ \pm T(1/2, \sqrt{2}/2, -1/2) \text{ et } \pm T(1/2, -\sqrt{2}/2, -1/2)$$

➤ **PARTIE III**. Dans cette partie, on note $K = \dfrac{1}{\sqrt{2}} A$ et $M = T(1, \sqrt{2}, 0)$. On se propose de calculer les puissances de K puis celles de M.

7/ Calculer K^2, K^3 puis K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suivant la parité de n.

Par définition : $K^2 = \dfrac{1}{2} A^2 = \dfrac{1}{2}(I+B) = T(1/2, 0, 1/2)$.

On en déduit que : $K^3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} A^3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(A + AB) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} A = K$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K^n = \begin{cases} K & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{2}(I+B) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

8/ Exprimer M à l'aide de I et de K et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I + a_n K + b_n K^2$ avec

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \,\text{impair}} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \,\text{pair}} \binom{n}{k} 2^k$$

On a : $M = I + 2K$. Soit n un entier naturel non nul. Puisque I et $2K$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'affirmer que :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k K^k = I + \sum_{k=1}^{n} 2^k K^k = I + \sum_{k=1,\ k \text{ impair}}^{n} 2^k K^k + \sum_{k=1,\ k \text{ pair}}^{n} 2^k K^k$$

Or pour tout entier k impair, on a $K^k = K$, et pour tout entier k pair, on a $K^k = K^2$. On en déduit que :

$$M^n = I + \sum_{k=1,\ k \text{ impair}}^{n} 2^k K + \sum_{k=1,\ k \text{ pair}}^{n} 2^k K^2$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I + a_n K + b_n K^2$ avec :

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^k$$

9/ Calculer $1 + a_n + b_n$ et $1 - a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

Soit n un entier naturel. On a : $1 + a_n + b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ et $1 - a_n + b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n$.

Ainsi : $\begin{cases} a_n + b_n = 3^n - 1 \\ a_n - b_n = 1 - (-1)^n \end{cases}$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\ (3^n - (-1)^n) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\ (3^n - 2 + (-1)^n) \end{cases}$

10/ Conclure en exprimant M^n comme combinaison linéaire de I, A et B.

D'après les deux questions précédentes, on a pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = I + \frac{1}{2}\ (3^n - (-1)^n)\, K + \frac{1}{2}\ (3^n - 2 + (-1)^n)\, K^2$$

On en déduit que :

$$M^n = I + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ (3^n - (-1)^n)\, A + \frac{1}{4}\ (3^n - 2 + (-1)^n)\, (I + B)$$

Exercice 3 — **(Continuité).** Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Une propriété du cours affirme que :

> Si $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Démontrer cette propriété.

Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x \geqslant x_0 \implies f(x) \geqslant M$ ($\spadesuit$).

Comme par ailleurs : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n \geqslant x_0$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) \geqslant M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty}$$

➤ **Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle part continue.** On définit une fonction appelée **indicatrice des rationnels**, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, en associant la valeur 1 à tout rationnel, et la valeur 0 à tout irrationnel. Plus formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

2/ Dans cette question, x désigne un nombre rationnel. On **admet** par ailleurs que π est irrationnel.

a/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x + \dfrac{\pi}{2^n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $x + \dfrac{\pi}{2^n} \in \mathbb{Q}$. Sous cette hypothèse, il existe un rationnel r tel que : $r = x + \dfrac{\pi}{2^n}$. On en déduit que : $\pi = 2^n(r-x)$. Or le réel $2^n(r-x)$ est un rationnel, puisque 2^n, r et x le sont, et que $\mathbb{Q}$ est un corps. Par conséquent : $\pi \in \mathbb{Q}$. Magnifique contradiction !

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N},\ x + \dfrac{\pi}{2^n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$

b/ Justifier brièvement que la suite de terme général $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est convergente, et préciser sa limite.

D'après la question précédente, et par définition de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right) = 0$. Il est alors clair que la suite de terme g$^{\underline{al}}$ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est convergente, et que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right) = 0}$

c/ Déduire de ce qui précède que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x.

Supposons que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue en x. Alors la propriété de continuité séquentielle permet d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. Or $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ (puisque x est rationnel) tandis que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x + \dfrac{\pi}{2^n}\right) = 0$ d'après la question précédente. Contradiction.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \text{La fonction } \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \text{ n'est pas continue en } x.}$

3/ Etablir que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel x.

D'après la question précédente, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun rationnel x.

Considérons à présent un nombre irrationnel x. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_n$ qui converge vers x.

Supposons que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ soit continue en x. La propriété de continuité séquentielle permet alors d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. Or $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ (puisque x est irrationnel) tandis que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$ (puisque $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$ pour tout entier n). Contradiction.

Il s'ensuit que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x et, l'irrationnel x étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on peut affirmer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun irrationnel.

Conclusion. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel x.

EXERCICE 4 — **(ANALYSE).** On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \textbf{(E)}$$

1/ Questions préliminaires. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ solution de **(E)**.

a/ Etablir que : $f(1) = 0$.

Par hypothèse : $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$. Puisque $f(1) = 2f(1)$, on a $f(1) = 0$.

Conclusion. Si f est solution de **(E)**, alors : $f(1) = 0$.

b/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \; f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ l'assertion : "$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \; f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$".

L'assertion $P(1)$ est trivialement vraie.

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel non nul n, et considérons $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On a : $f\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right) = f\left(x_{n+1} \prod_{k=1}^{n} x_k\right) = f(x_{n+1}) + f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)$

Ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie, et établit donc l'implication : $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Conclusion. Si f est solution de **(E)**, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$,

$$f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

c/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Soit x un réel strictement positif. Par hypothèse : $f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'autre part : $f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$ (d'après 1-a).

Conclusion. Si f est solution de **(E)**, alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

➤ **Résolution de (E).**

Dans cette partie, on suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solution de (E).

2/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x^n) = nf(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier naturel n, on a d'après la question 1-b : $f(x^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x) = nf(x)$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}. \text{ Si } f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ est solution de } \textbf{(E)}, \text{ alors : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x^n) = nf(x)}$.

3/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(\mathrm{e}^n) = nf(\mathrm{e})$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier naturel n, on a : $f(x^n) = nf(x)$ d'après la question précédente.

Soit n un entier relatif strictement négatif. Alors $(-n) \in \mathbb{N}$, et on a donc : $f(x^{-n}) = -nf(x)$ $(\spadesuit)$.

Par ailleurs : $f(x^{-n}) = f\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = -f(x^n)$ $(\clubsuit)$ d'après la question 1-c.

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $-f(x^n) = -nf(x)$. D'où : $f(x^n) = nf(x)$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}_-,\ f(x^n) = nf(x)$.

Conclusion. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est solution de **(E)**, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = nf(x)$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(\mathrm{e}^n) = nf(\mathrm{e})$

4/ Etablir que : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\mathrm{e}^{1/q}\right) = \dfrac{1}{q} f(\mathrm{e})$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On a : $f\left(\left[\mathrm{e}^{1/q}\right]^q\right) = f(\mathrm{e})$ $(\spadesuit)$. Par ailleurs, d'après 4 : $f\left(\left[\mathrm{e}^{1/q}\right]^q\right) = qf\left(\mathrm{e}^{1/q}\right)$ $(\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $qf\left(\mathrm{e}^{1/q}\right) = f(\mathrm{e})$.

Conclusion. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est solution de **(E)**, alors :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\mathrm{e}^{1/q}\right) = \frac{1}{q} f(\mathrm{e})$$

5/ Etablir que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(\mathrm{e}^r) = r\,f(\mathrm{e})$.

Soit r un nombre rationnel : $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ r = \dfrac{p}{q}$. On a alors :

$$f(\mathrm{e}^r) = f\left(\mathrm{e}^{p/q}\right) = f\left(\left(\mathrm{e}^{1/q}\right)^p\right) = pf\left(\mathrm{e}^{1/q}\right) = \frac{p}{q} f(\mathrm{e})$$

(l'avant-dernière égalité provenant de la question 5, et la dernière de la question 6). Ainsi : $f(\mathrm{e}^r) = rf(\mathrm{e})$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}. \text{ Si } f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ est solution de } \textbf{(E)}, \text{ alors : } \forall r \in \mathbb{Q},\ f(\mathrm{e}^r) = r\,f(\mathrm{e})}$.

6/ En déduire finalement que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\mathrm{e}^x\right) = x\, f(\mathrm{e})$.

Soit x un nombre réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_n$ qui converge vers x.

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{r_n} = \mathrm{e}^x$ et que f est continue en e^x, la propriété de continuité séquentielle permet d'affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\mathrm{e}^{r_n}\right) = f(\mathrm{e}^x)$ $(\spadesuit)$.

Par ailleurs, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(\mathrm{e}^{r_n}) = r_n f(\mathrm{e})$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\mathrm{e}^{r_n}\right) = x f(\mathrm{e})$ $(\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $f(\mathrm{e}^x) = x f(\mathrm{e})$.

Conclusion. Si $f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ est solution de **(E)**, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\mathrm{e}^x\right) = x\, f(\mathrm{e})$

7/ Montrer que si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de **(E)**, alors elle sont proportionnelles.[*]

Soient f et g sont deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solutions de **(E)**.

Le point-clef est que f (comme g) est uniquement déterminée par sa valeur en e. En effet, considérons un réel $y \in \mathbb{R}_+^*$. On peut judicieusement observer que : $y = \mathrm{e}^{\ln(y)}$. Par suite : $f(y) = f\left(\mathrm{e}^{\ln(y)}\right)$. D'après la question précédente, on a donc : $f(y) = \ln(y) f(\mathrm{e})$.

Le réel strictement positif y étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on peut affirmer que :

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(y) = \ln(y) f(\mathrm{e})$. De la même façon : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g(y) = \ln(y) g(\mathrm{e})$.

Par conséquent, si $f(\mathrm{e}) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, et f et g sont trivialement proportionnelles.[†]

Si en revanche $f(\mathrm{e}) \neq 0$, alors on a : $g(\mathrm{e}) = \dfrac{g(\mathrm{e})}{f(\mathrm{e})} f(\mathrm{e})$. Ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g(y) = \ln(y) g(\mathrm{e}) = \ln(y) \frac{g(\mathrm{e})}{f(\mathrm{e})} f(\mathrm{e}) = \frac{g(\mathrm{e})}{f(\mathrm{e})} \underbrace{\ln(y) f(\mathrm{e})}_{=f(y)} = \frac{g(\mathrm{e})}{f(\mathrm{e})} f(y)$$

En résumé : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g(y) = \dfrac{g(\mathrm{e})}{f(\mathrm{e})} f(y)$. Les fonctions f et g sont donc proportionnelles.

Conclusion. Si f et g sont deux solutions continues de **(E)**, alors elle sont proportionnelles.

8/ En déduire soigneusement l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ solutions de **(E)**.

La fonction ln est clairement solution de **(E)**. D'après la question précédente, si f est une solution continue de **(E)**, alors elle est proportionnelle à ln, et il existe donc un réel C tel que $f = C \ln$.

On a ainsi prouvé que si f est une solution continue de **(E)**, alors $f = C \ln$ pour un certain réel C.

La preuve de l'implication réciproque est une formalité qui permet de conclure.

Conclusion. Soit $f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$. On a :

$$[f \text{ solution de } \textbf{(E)}] \iff \left[\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = C \ln(x)\right]$$

$*$. C'est à dire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda g$, ou $g = \lambda f$.

†. En observant puissamment que $f = 0 \times g \ldots$

Exercice 5 — $\boxed{\textbf{(Distance dans } \mathrm{M}_p(\mathbb{R})\textbf{).}}$

1/ **(Inégalité triangulaire).** Soient A, B et C trois matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a :‡ $|c_{ij} - a_{ij}| \leqslant |c_{ij} - b_{ij}| + |b_{ij} - a_{ij}|$

En particulier : $\max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |c_{ij} - a_{ij}| \leqslant \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |c_{ij} - b_{ij}| + \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |b_{ij} - a_{ij}|$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\ (A,B,C) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})^3,\ \mathrm{d}(A,C) \leqslant \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C)}$

2/ a/ On note S l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ situées à une distance inférieure ou égale à 1 de la matrice identité, c'est à dire :

$$S = \{A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{d}(A, \mathrm{I}_p) \leqslant 1\}$$

$\boxed{S \text{ est donc une partie de } \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) \text{ par définition, qui contient la matrice } 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}, \text{ puisque : } \mathrm{d}\left(\mathrm{I}_p, 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}\right) = 1}$ (et donc $\leqslant 1$).

b/ Les matrices I_p et $2\mathrm{I}_p$ appartiennent à S, mais leur somme n'appartient pas à S (puisque $\mathrm{d}(3\mathrm{I}_p, \mathrm{I}_p) = 2$. Donc la loi "+" n'est pas une LCI dans S. Ainsi : $\boxed{(S,+) \text{ n'est pas un sous-groupe de } (\mathrm{M}_p(\mathbb{R}), +)}$.

3/ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout coefficient de la matrice A est limite d'une suite de rationnels. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, il existe donc une suite de rationnels que l'on note $(b_{ij,n})_n$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{ij,n} = a_{ij}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les suites $(b_{ij,n})_n$ convergent vers les réels a_{ij}, on a :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \exists\, N_{ij} \in \mathbb{N}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_{ij}] \Longrightarrow [|b_{ij,n} - a_{ij}| < \varepsilon]$$

On pose donc : $N_0 = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} N_{ij}$. Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_0] \Longrightarrow \left[\forall\ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ |b_{ij,n} - a_{ij}| < \varepsilon\right]$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_0] \Longrightarrow \left[\forall\ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ |b_{ij,n} - a_{ij}| < \varepsilon\right]}$.

‡. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, établie en cours.