Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}9 — 26 février 2022

- *La durée du devoir est de 4 heures, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 4 pages.*
- *N'oubliez pas :*
  - *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
  - *d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction.*

Exercice 1 — (Calcul matriciel).

Soit p un entier naturel non nul.
Tout au long de cet exercice, on considère une matrice M de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ et $M^3 = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$.
Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice :

$$\boxed{E(t) = \mathrm{I}_p + tM + \frac{t^2}{2}M^2} \quad \text{(où } \mathrm{I}_p \text{ désigne la matrice identité de } \mathrm{M}_p(\mathbb{R})\text{)}.$$

1/ Etablir que :

$$\forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad E(s)\,E(t) = E(s+t)$$

2/ En déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad E(nt) = [E(t)]^n$$

3/ Montrer que pour tout réel t, la matrice $E(t)$ est inversible. Quelle est son inverse ?

4/ On note G l'ensemble de toutes les matrices $E(t)$ (avec t réel arbitraire), c'est-à-dire :

$$G = \{E(t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$. Est-il abélien ?

5/ On considère l'application φ définie en posant :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & E(t) \end{array}$$

a/ Montrer que φ est un morphisme de groupes, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$.

b/ Soit t un nombre réel. Etablir que :

$$[\varphi(t) = \mathrm{I}_p] \Longleftrightarrow [t = 0]$$

c/ Montrer que l'application φ est injective.

Exercice 2 — (Groupe symétrique).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1/ Ecrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints. En déduire la signature de σ. Déterminer σ^{-1}.

2/ Quelques questions sur le groupe alterné A_6.

a/ Rappeler la définition de A_6 ; puis préciser le cardinal de A_6.

b/ On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : A_6 &\longrightarrow A_6 \\ \sigma &\longmapsto (123)\sigma \end{aligned}$$

Justifier que l'application φ est bien définie, et qu'elle est bijective.

c/ Dans A_6, on considère l'ensemble H suivant :

$$H = \{\sigma \in A_6 \,/\, (123)\sigma(132) = \sigma\}$$

Montrer que H est un sous-groupe de A_6, distinct de A_6 et de $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_6}\}$.

d/ Dans A_6, toute permutation distincte de l'identité est :

— un 3-cycle ;

— ou un 5-cycle ;

— ou le produit de deux 3-cycles à supports disjoints ;

— ou le produit... ;

— ou le produit....

Compléter les deux lignes précédentes.

e/ Combien existe t-il de 3-cycles dans A_6 ?

Exercice 3 — (Suite) Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{7}} \left[\left(2+\sqrt{7}\right)^n - \left(2-\sqrt{7}\right)^n \right]$$

Etablir que pour tout entier naturel n, le réel u_n est un entier naturel.

Problème 1 — (Analyse)

Partie 1 : étude d'une fonction

On considère la fonction h définie sur $[0, \pi]$ par : $\forall\, t \in\ [0, \pi]\,,\ h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$.

Et on définit une seconde fonction φ sur $[0, \pi]$ en posant :

$$\forall\, t \in\ [0, \pi]\,, \quad \varphi\,(t) = \begin{cases} \dfrac{h\,(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ \\ -1 \quad \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1/ Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 ? La réponse devra être justifiée.

2/ Déduire de la question précédente les limites de $\dfrac{t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ puis de $\dfrac{h\,(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ lorsque t tend vers 0.

Dans la suite du problème, on pourra admettre que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Partie 2 : sommes et intégrales

3/ Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\cos\,(k\pi) = (-1)^k$.

4/ Etablir que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi t \cos\,(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

5/ Etablir que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi t^2 \cos\,(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi\,(-1)^k}{k^2}$$

6/ Pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$I_k = \int_0^\pi h(t) \cos\,(kt)\ \mathrm{d}t$$

Déduire de ce qui précède l'expression exacte de I_k en fonction de k.

7/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall t \in \ ]0,\pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

8/ Déduire de la question précédente l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall t \in \ ]0,\pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \lambda$$

Partie 3 : conclusion

9/ Soit ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

a/ Justifier brièvement que ψ' est bornée sur $[0,\pi]$.

b/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\dfrac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{n+\dfrac{1}{2}} \times M\right)$$

où l'on a posé : $M = \max\limits_{[0,\pi]} |\psi'(t)|$.

10/ Déduire de la question précédente que pour toute fonction ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right) = 0$$

11/ Etablir que :

$$\forall n \in \ \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} h(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\mathrm{d}t$$

12/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de la limite :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$$