Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}9 — 26 février 2022

Exercice 1 — (Calcul matriciel).

Soit p un entier naturel non nul.
Tout au long de cet exercice, on considère une matrice M de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ et $M^3 = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$.
Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice :

$$\boxed{E(t) = \mathrm{I}_p + tM + \frac{t^2}{2} M^2} \quad \text{(où } \mathrm{I}_p \text{ désigne la matrice identité de } \mathrm{M}_p(\mathbb{R})\text{).}$$

1/ Etablir que :

$$\forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad E(s)\ E(t) = E(s+t)$$

Soient s et t deux réels quelconques. On a :

$$E(s)\,E(t) = \left(\mathrm{I}_p + sM + \frac{s^2}{2}M^2\right)\left(\mathrm{I}_p + tM + \frac{t^2}{2}M^2\right)$$

$$= \mathrm{I}_p + tM + \frac{t^2}{2}M^2 + sM + stM^2 + \underbrace{\frac{st^2}{2}M^3}_{=0} + \frac{s^2}{2}M^2 + \underbrace{\frac{s^2t}{2}M^3}_{=0} + \underbrace{\frac{s^2t^2}{4}M^4}_{=0}$$

D'où : $\forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)\,E(t) = \mathrm{I}_p + (s+t)\,M + \dfrac{s^2+2st+t^2}{2}M^2$

$$= \mathrm{I}_p + (s+t)\,M + \frac{(s+t)^2}{2}M^2 = E(s+t)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)\,E(t) = E(s+t)}$

2/ En déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad E(nt) = [E(t)]^n$$

Soit t un réel arbitraire. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "$E(nt) = [E(t)]^n$". L'initialisation (pour $n = 0$) est immédiate puisque $E(0) = \mathrm{I}_p$ et $[E(t)]^0 = \mathrm{I}_p$. Reste à établir l'hérédité.

Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n.
Alors : $[E(t)]^{n+1} = [E(t)]^n \times E(t) =_{HR} E(nt) + E(t) = E(nt+t) = E((n+1)\,t)$.

Ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$, et établit l'hérédité de la propriété.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ E(nt) = [E(t)]^n}$.

3/ Montrer que pour tout réel t, la matrice $E(t)$ est inversible. Quelle est son inverse ?

Soit t un réel arbitraire. D'après la question 1 : $E(t) \times E(-t) = E(-t) \times E(t) = E(0) = \mathrm{I}_p$.

Par suite : $\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R},\ E(t) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \text{ et } [E(t)]^{-1} = E(-t)}$.

4/ On note G l'ensemble de toutes les matrices $E(t)$ (avec t réel arbitraire), c'est-à-dire :

$$G = \{E(t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$. Est-il abélien ?

Montrons que $G = \{E(t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$.

➤ SG1 : $G \subset \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

➤ SG2 : $\mathrm{I}_p \in G$ (puisque $\mathrm{I}_p = E(0)$).

➤ SG3 : $\forall\, (N, N') \in G^2,\ NN' \in G$ d'après la question 18.

➤ SG4 : enfin, si $N \in G$, alors N est inversible et $N^{-1} \in G$ d'après la question précédente.

Par conséquent : $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$.

De plus : $\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)\,E(t) = E(s+t) = E(t)\,E(s)$. Donc G est abélien.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : (G, \times) \text{ est un sous-groupe abélien de } (\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)}$.

5/ On considère l'application φ définie en posant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & E(t) \end{array}$$

a/ Montrer que φ est un morphisme de groupes, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$.

D'après la question 1 : $\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s+t) = \varphi(s) \times \varphi(t)$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \varphi \text{ est un morphisme de groupes, de } (\mathbb{R}, +) \text{ dans } (\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times).}$

b/ Soit t un nombre réel. Etablir que :

$$[\varphi(t) = \mathrm{I}_p] \Longleftrightarrow [t = 0]$$

Soit t un réel tel que : $\varphi(t) = \mathrm{I}_p$. Alors : $\mathrm{I}_p + tM + \dfrac{t^2}{2} M^2 = \mathrm{I}_p$, d'où : $tM + \dfrac{t^2}{2} M^2 = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$.

En multipliant par M cette égalité, on obtient : $tM^2 = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ (puisque $M^3 = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ par hypothèse).

Comme $M^2 \neq 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ par hypothèse, on en déduit que $t = 0$.

On a ainsi établi l'implication : $[\varphi(t) = \mathrm{I}_p] \Longrightarrow [t = 0]$. La réciproque est triviale.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : [\varphi(t) = \mathrm{I}_p] \Longleftrightarrow [t = 0].}$

c/ Montrer que l'application φ est injective.

D'après la question 5-a, φ est un morphisme de groupes, et d'après la question 5-b le noyau de ce morphisme est trivial : $\ker\varphi = \{0_{\mathbb{R}}\}$. On en déduit que φ est un morphisme de groupes injectif.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \text{l'application } \varphi \text{ est injective.}}$

Exercice 2 — (Groupe symétrique).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1/ Ecrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints. En déduire la signature de σ. Déterminer σ^{-1}.

On a : $\sigma = (123)(46)$. On en déduit que $\varepsilon(\sigma) = -1$, et que $\sigma^{-1} = (132)(46)$.

2/ Quelques questions sur le groupe alterné A_6.

a/ Rappeler la définition de A_6 ; puis préciser le cardinal de A_6.

A_6 est la partie de S_6 constituée des permutations paires (càd de signature -1) ; A_6 est un sous-groupe de S_6, appelé groupe alterné. Son cardinal est : $\dfrac{6!}{2} = 360$.

Conclusion : $A_6 = \{\sigma \in S_6,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$ et $\text{card}(A_6) = 360$.

b/ On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : A_6 &\longrightarrow A_6 \\ \sigma &\longmapsto (123)\sigma \end{aligned}$$

Justifier que l'application φ est bien définie, et qu'elle est bijective.

Pour tout $\sigma \in A_6$, on a : $\varepsilon((123)\sigma) = \varepsilon((123))\varepsilon(\sigma)$. Puisque $\varepsilon(\sigma) = 1$ (par hypothèse), et $\varepsilon((123)) = 1$ (la signature d'un p-cycle vaut $(-1)^{p-1}$), on en déduit que : $\varepsilon((123)\sigma) = 1$.

Ainsi : $\forall\, \sigma \in A_6,\ \varepsilon(\varphi(\sigma)) = 1$. D'où : $\sigma \in A_6 \Longrightarrow \varphi(\sigma) \in A_6$. Ce qui justifie que l'application φ est bien définie.

Notons à présent que : $(132)(123) = (123)(132) = \text{id}_{\mathbb{N}_6}$. Ceci permet d'affirmer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : A_6 &\longrightarrow A_6 \\ \sigma &\longmapsto (132)\sigma \end{aligned}$$

est telle que : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{id}_{A_6}$. Il s'ensuit que φ est bijective (et sa bijection réciproque est ψ).

Conclusion : l'application φ est bien définie, et bijective.

c/ Dans A_6, on considère l'ensemble H suivant :

$$H = \{\sigma \in A_6 \,/\, (123)\sigma(132) = \sigma\}$$

Montrer que H est un sous-groupe de A_6, distinct de A_6 et de $\{\text{id}_{\mathbb{N}_6}\}$.*

Montrons que H est un sous-groupe de A_6.

➤ <u>SG1</u> : $H \subset A_6$ d'après l'énoncé.

➤ <u>SG2</u> : $\text{id}_{\mathbb{N}_6} \in H$, puisque : $(123)\text{id}_{\mathbb{N}_6}(132) = (123)(132) = \text{id}_{\mathbb{N}_6}$.

∗. Version modifiée de la question 2-c initiale, qui était fausse.

➤ <u>SG3</u> : soient σ et ρ dans H. On a :

$$(123)\sigma\rho(132) = (123)\sigma(132)(123)\rho(132) = \sigma\rho \quad \text{d'où : } \sigma\rho \in H$$

Il s'ensuit que H est stable par produit.

➤ <u>SG4</u> : soit $\sigma \in H$. On a :

$[(123)\sigma(132) = \sigma] \Longrightarrow [(132)\sigma^{-1}(123) = \sigma^{-1}] \Longrightarrow [\sigma^{-1} = (123)\sigma^{-1}(132)] \Longrightarrow [\sigma^{-1} \in H]$

Ainsi : $[\sigma \in H] \Longrightarrow [\sigma^{-1} \in H]$.

On en déduit que H est un sous-groupe de A_6.

De plus : $(123)(45)(132) = (123)(132)(45) = (45)$. Donc : $(45) \in H$. D'où : $H \neq \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_6}\}$.

Enfin : $(123)(12)(132) = (23)$. Donc : $(123)(12)(132) \neq (12)$. Donc : $(12) \notin H$. D'où : $H \neq A_6$.

Conclusion : H est un sous-groupe de A_6, distinct de A_6 et de $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_6}\}$.

d/ Dans A_6, toute permutation distincte de l'identité est :

— un 3-cycle ;
— ou un 5-cycle ;
— ou le produit de deux 3-cycles à supports disjoints ;
— ou le produit. . . ;
— ou le produit. . . .

Compléter les deux lignes précédentes.

Dans S_6, toute permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints. En particulier, toute permutation de A_6 s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints, de telle sorte que le prioduit de ces signatures soit égal à 1.

On doit donc compléter les deux lignes de l'énoncé comme suit :

— ou le produit de deux transpositions à supports disjoints ;
— ou le produit d'une transposition et d'un 4-cycle à supports disjoints.

e/ Combien existe t-il de 3-cycles dans A_6 ?

Pour construire un 3-cycle, on commence par choisir son support $\{a_1, a_2, a_3\}$: il existe $\binom{6}{3}$ façons de le faire.

Il existe alors exactement deux 3-cycles ayant ce support : $(a_1a_2a_3)$ et $(a_1a_3a_2)$.

Conclusion : il existe exactement $2 \times \binom{6}{3} = 40$ 3-cycles dans A_6.

Exercice 3 — **(Suite)** Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\left(2+\sqrt{7}\right)^n - \left(2-\sqrt{7}\right)^n\right]$$

Etablir que pour tout entier naturel n, le réel u_n est un entier naturel.

Les réels $\left(2+\sqrt{7}\right)$ et $\left(2-\sqrt{7}\right)$, dont les somme et produit sont respectivement égaux à 4 et -3, sont les deux racines de l'équation $x^2-4x-3=0$. Il s'ensuit que u_n est le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, satisfaisant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.

De plus, d'après l'énoncé : $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.

Montrons à présent que pour tout entier naturel n, le terme u_n est dans $\mathbb{N}$, par récurrence double. A cette fin, on note $P(n)$ l'assertion "$u_n \in \mathbb{N}$".

➤ Initialisation. Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

➤ Hérédité. Supposons les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. Alors u_n et u_{n+1} sont entiers naturels, et il s'ensuit que $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$ est lui aussi entier naturel. Ce qui assure que la propriété $P(n+2)$ est vraie, établit l'hérédité, et achève cette récurrence.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{\sqrt{7}}\left[\left(2+\sqrt{7}\right)^n - \left(2-\sqrt{7}\right)^n\right] \in \mathbb{N}$.

Problème 1 — **(Analyse)**

Partie 1 : étude d'une fonction

On considère la fonction h définie sur $[0,\pi]$ par : $\forall t \in [0,\pi],\ h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$.

Et on définit une seconde fonction φ sur $[0,\pi]$ en posant :

$$\forall t \in [0,\pi], \quad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 \quad \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1/ Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 ? La réponse devra être justifiée.

Pour tout réel t, on a : $\sin(t) = t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

Il s'ensuit que pour tout réel non nul t, on a : $\dfrac{\sin(t)}{t} = 1 + \varepsilon(t)$. Par suite : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = 1.}$

2/ Déduire de la question précédente les limites de $\dfrac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ puis de $\dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ lorsque t tend vers 0.

On commence par observer que d'après ce qui précède : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin(t)} = 1$.

Puis, en procédant au changement de variable $T = t/2$, on obtient : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{2\sin(t/2)} = \lim\limits_{T\to 0}\dfrac{T}{\sin(T)} = 1$.

Par ailleurs, pour tout t non nul : $\dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{t^2}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

On a déjà vu que : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t}{2\sin(t/2)} = 1$ d'où $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t^2}{2\sin(t/2)} = 0$. Par suite : $\boxed{\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -1}$.

Dans la suite du problème, on admet que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Partie 2 : sommes et intégrales

3/ Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\cos(k\pi) = \dfrac{\mathrm{e}^{ik\pi} + \mathrm{e}^{-ik\pi}}{2} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^k + \left(\mathrm{e}^{-i\pi}\right)^k}{2}$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall k \in \mathbb{N},\ \cos(k\pi) = (-1)^k}$.

4/ Etablir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, on pose : $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos(kt) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\left[\cos(kt)\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2}$$

Ainsi : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^k - 1}{k^2}}$

5/ Etablir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} t^2\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, on pose : $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v'(t) = \cos(kt) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^\pi t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^2 \sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{k}\underbrace{\int_0^\pi t\sin(kt)\ \mathrm{d}t}_{=J_k} \qquad (\spadesuit)$$

Calculons J_k. Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, on pose : $\begin{cases} U(t) = t \\ V(t) = -\dfrac{\cos(kt)}{k} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} U'(t) = 1 \\ V'(t) = \sin(kt) \end{cases}$

Les fonctions U et V sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$J_k = \int_0^\pi t\sin(kt)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(kt)\ \mathrm{d}t = -\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2}\underbrace{\left[\sin(kt)\right]_0^\pi}_{=0}$$

D'où : $J_k = -\dfrac{\pi(-1)^k}{k} + \dfrac{1}{k^2} \qquad (\clubsuit)$

On déduit alors de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi t^2\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \dfrac{2\pi(-1)^k}{k^2}}$

6/ Pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$I_k = \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

Déduire de ce qui précède l'expression exacte de I_k en fonction de k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I_k = \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\cos(kt)\ \mathrm{d}t - \int_0^\pi t\cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_k = \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{k^2}}$.

7/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall t \in\ ]0,\pi],\quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Soient $t \in\ ]0;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^n \exp^{ikt}}_{S}\right)$, et calculons S.

On a : $$S = \sum_{k=1}^{n} \exp^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\exp^{it}\right)^k = e^{it}\,\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} \quad (\text{puisque } e^{it} \neq 1).$$

Puis on applique la technique de l'angle moitié :

$$S = e^{it}\,\frac{e^{int/2}}{e^{it/2}}\,\frac{e^{-int/2}-e^{int/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} = e^{i\,\frac{n+1}{2}\,t}\,\frac{-2i\sin(nt/2)}{-2i\sin(t/2)} \quad \text{d'où : } \boxed{S = e^{i\,\frac{n+1}{2}\,t}\,\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}}$$

On en déduit, en identifiant les parties réelles de l'égalité précédente que :

$$\boxed{\forall t \in \,]0;\pi],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}}.$$

8/ Déduire de la question précédente l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall t \in \,]0,\pi],\quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \lambda$$

Soient $t \in \,]0;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}+\frac{n+1}{2}\,t\right)+\sin\left(\frac{nt}{2}-\frac{n+1}{2}\,t\right)}{2} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)+\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2}$$
$$= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2}$$

De cette identité et de la question précédente, on déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \,]0;\pi],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2} \qquad \left(\text{d'où } \lambda = \frac{1}{2}\right)}.$$

Partie 3 : conclusion

9/ Soit ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

a/ Justifier brièvement que ψ' est bornée sur $[0,\pi]$.

Par hypothèse, ψ' est continue sur $[0,\pi]$.

$\boxed{\text{Selon le théorème des bornes atteintes, } \psi' \text{ est bornée sur } [0,\pi].}$

b/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \times M\right)$$

où l'on a posé : $M = \max\limits_{[0,\pi]} |\psi'(t)|$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Pour tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose : $\begin{cases} u(t) = \psi(t) \\ v(t) = -\dfrac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} u'(t) = \psi'(t) \\ v'(t) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+\frac{1}{2}}\psi(t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

En observant que $\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$, on déduit de ce qui précède :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\psi(0)}{n+\frac{1}{2}}}_{=A} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^{\pi} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\psi'(t)\,\mathrm{d}t}_{=B}}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a : $\left|\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant |A| + \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}|B|$.

➤ Il est clair que : $|A| = \dfrac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}}$

➤ Par ailleurs : $|B| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \underbrace{\left|\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}_{\leqslant 1} \times \underbrace{|\psi'(t)|}_{\leqslant M}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} M\,\mathrm{d}t = M\pi$

On déduit de ces inégalités que :

$$\boxed{\forall \psi \in \mathscr{C}^1([0,\pi], \mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}}}$$

10/ Déduire de la question précédente que pour toute fonction ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi]$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t\right) = 0$$

D'après la question précédente, si ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}}$$

Comme : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left|\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t\right| = 0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t=0}$

11/ Etablir que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}h(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\,\mathrm{d}t$$

D'après la question 6, on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\pi}h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}$

En sommant les égalités obtenues en faisant varier k de 1 à n (avec $n\in\mathbb{N}^*$) dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

la deuxième égalité provenant de la linéarité de l'intégrale.

Conclusion. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,\mathrm{d}t$

12/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de la limite :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

Et d'après la question 8 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}h(t)\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}h(t)\,\mathrm{d}t$

Soit : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}h(t)\,\mathrm{d}t\quad(✾)}$

D'après l'énoncé, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On peut donc lui appliquer le résultat de la question 10 pour obtenir : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t=0$

On déduit de cette observation et de la relation (✾) que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}h(t)\,\mathrm{d}t\quad(❀)}$

Il reste à calculer : $I = \displaystyle\int_0^\pi h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} - t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}\left[t^3\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{3}$

On déduit de ce calcul et de (❀) que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}}$ c'est à dire $\boxed{\zeta\,(2) = \dfrac{\pi^2}{6}}$