Devoir surveillé de Mathématiques n°10 — 12 mars 2022

- *La durée du devoir est de 4 heures, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 4 pages.*
- *N'oubliez pas :*
  - *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
  - *d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction.*

Exercice 1 — (Analyse). On considère les fonctions f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

3/ A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ \frac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

4/ A l'aide de ce qui précède, établir que g est continue en 0.

Exercice 2 — (Arithmétique). Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Déterminer le reste dans la division euclidienne de 1302^{125} par 13.

2/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$n \equiv 1 \quad [3], \text{ et } n \equiv 1 \quad [5], \text{ et } n \equiv 1 \quad [7]$$

3/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [10] \\ x \equiv 7 \quad [12] \end{cases}$

4/ Soient $a \in \mathbb{Z}$ un entier quelconque, p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts.
Montrer que :

$$[a \wedge p_1 p_2 = 1] \iff [a \wedge p_1 = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge p_2 = 1]$$

Exercice 3 — (Calcul matriciel).

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ et A_n la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie en posant :

$$A_n = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ en posant } a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$$

1/ Ecrire la matrice A_2. Montrer que A_2 est inversible, et préciser son inverse.

2/ **Le cas** $n = 3$. On note $\overline{A_3} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

a/ Calculer $A_3 \times \overline{A}_3$.

b/ Etablir que $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

3/ **Le cas général**. On revient au cas général, dans lequel n désigne un entier naturel $\geqslant 3$ quelconque.

Etablir que $A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

Exercice 4 — (Une famille d'intégrales)

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels on pose :

$$J(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t$$

1/ Soit p un entier naturel. Calculer $J(p, 0)$.

2/ Soient p et q deux entiers naturels. A l'aide d'un changement de variable, établir que :

$$J(p,q) = J(q,p)$$

3/ Soient p et q deux entiers naturels. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$J(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} J(p+1,q)$$

4/ Etablir que :

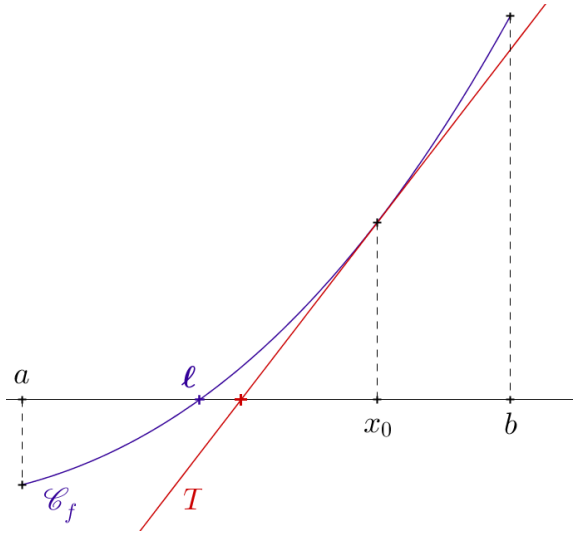
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \ J(p,q) = \frac{p! \times q!}{(p+q+1)!}$$

Problème 1 — (Résolution approchée d'équation).

On se donne deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que :

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$
- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
- Pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$



Partie A - Deux questions préliminaires

1/ Etablir que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\ell \in]a, b[$.

2/ Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0.

Partie B - Etude d'une fonction contractante

Pour tout $x \in [a, b]$, on pose : $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

3/ Justifier brièvement que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

4/ Calculer $g(\ell)$ et $g'(\ell)$.

5/ Justifier qu'il existe un réel $h > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [\ell - h, \ell + h]\,,\ |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

6/ On note I l'intervalle $[\ell - h, \ell + h]$. Montrer que :

$$\forall\, x \in I,\ g(x) \in I$$

Partie C - Etude d'une suite récurrente

On définit une suite u en posant :

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$$

7/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$

8/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2} \times |u_n - \ell|$

9/ Etablir que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Partie D - Programmation en Python

Dans cette partie, on considère la fonction $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en posant :

$$\forall\, x \in [1,2], \qquad f(x) = x^2 - 2$$

On admet que f satisfait les conditions énoncées au début du problème.

Par ailleurs, on note g la fonction définie sur $[1,2]$ en posant :

$$\forall\, x \in [1,2], \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

10/ Montrer que : $\forall\, x \in [1,2], \quad |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

11/ On souhaite définir en langage Python une fonction SUITE(n), qui reçoit comme paramètre un entier naturel n et qui retourne la valeur de u_n, la suite (u_n) étant définie en posant :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$$

a/ Recopier et compléter les trois lignes indiquées ci-dessous.

```
# Définition de la fonction g

def g(x):
    return # Ligne à compléter 1

# Définition de la fonction "SUITE"

def SUITE(n):
    u =# Ligne à compléter 2
    for k in range(n):
        u =# Ligne à compléter 3
    return u
```

b/ Ecrire une instruction permettant de définir la liste L des 100 premières valeurs de la suite u.

Exercice 5 — (Groupes).

On appelle **sous-groupe additif de** $\mathbb{Z}$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

On rappelle par ailleurs que pour tout entier relatif n, on note :

$$n\mathbb{Z} = \{kn \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

l'ensemble des multiples de n.

1/ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $n\mathbb{Z} = \{kn \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$.

2/ Le but de cette question est de prouver la réciproque de l'assertion précédente.

a/ Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$. Justifier que si H contient un entier p strictement négatif, alors $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$.

b/ Montrer que si H est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$, il existe un entier naturel n tel que : $H = n\,\mathbb{Z}$.

Indication : on pourra distinguer deux cas suivant que $H \cap \mathbb{N}^* = \emptyset$ ou que $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$.