Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}10 — 12 mars 2022

Exercice 1 — (Analyse). On considère les fonctions f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Selon les thorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

On en déduit que f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Si $x=0$, l'encadrement est trivialement vrai ($0 \leqslant 0 \leqslant 0\ldots$).

Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$. On peut donc légitimement appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[0, x]$:

$$\exists\, c \in]0, x[, \qquad f'(c) = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{d'où :} \quad \exists\, c \in]0, x[, \qquad xf'(c) = f(x)$$

La fonction f' étant croissante sur $]0, x[$ (question 1), et le réel x étant positif, on en déduit que :

$$xf'(0) \leqslant f(x) \leqslant xf'(x) \qquad \text{d'où :} \quad \frac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

3/ A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ \frac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Soit $x < 0$. La fonction f est continue sur $[x, 0]$, et dérivable sur $]x, 0[$. On peut donc légitimement appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[x, 0]$:

$$\exists\, c \in]x, 0[, \qquad f'(c) = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{d'où :} \quad \exists\, c \in]x, 0[, \qquad xf'(c) = f(x)$$

La fonction f' étant croissante sur $]x, 0[$ (question 1), et le réel x étant négatif, on en déduit que :

$$xf'(x) \geqslant f(x) \geqslant xf'(0) \qquad \text{d'où :} \quad \frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant f(x) \geqslant \frac{x}{2}$$

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ \dfrac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

4/ A l'aide de ce qui précède, établir que g est continue en 0.

Pour tout réel x strictement positif on a d'après la question 2 :

$$\frac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Puisqu'il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit avec le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, pour tout réel x strictement négatif on a d'après la question 3 :

$$\frac{1}{2} \geqslant g(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Comme il est encore clair que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit avec le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

Il résulte des calculs précédents que g admet une limite en 0, et que : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Conclusion. La fonction g est continue en 0.

Exercice 2 — **(Arithmétique).** Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Déterminer le reste dans la division euclidienne de 1302^{125} par 13.

Commençons par observer que $1302 \equiv 2\ [13]$. Ainsi : $1302^{125} \equiv 2^{125}\ [13]$.

Puisque $13 \in \mathscr{P}$ et $2 \wedge 13 = 1$, on a : $2^{12} \equiv 1\ [13]$ (corollaire du petit théorème de Fermat). Par suite :

$$2^{125} \equiv \left(2^{12}\right)^{10} \times 2^5\ [13] \quad \text{d'où :} \quad 2^{125} \equiv 2^5\ [13]$$

Il reste à observer que $2^5 = 32$, donc : $2^5 \equiv 6\ [13]$. Finalement : $1302^{125} \equiv 6\ [13]$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de 1302^{125} par 13 est égal à 6.

2/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$n \equiv 1 \quad [3], \text{ et } n \equiv 1 \quad [5], \text{ et } n \equiv 1 \quad [7]$$

Soit n un entier relatif vérifiant les trois congruences de l'énoncé. Alors :

$$3\,|\,(n-1)\,, \qquad 5\,|\,(n-1)\,, \quad \text{et } 7\,|\,(n-1)$$

Puisque $3 \wedge 5 = 1$, on en déduit que $15\,|\,(n-1)$. Puisque $15 \wedge 7 = 1$, on en déduit que $105\,|\,(n-1)$.

On a ainsi prouvé l'implication :

$$(n \equiv 1 \quad [3]\,, \text{ et } n \equiv 1 \quad [5], \text{ et } n \equiv 1 \quad [7]) \Longrightarrow (n \equiv 1 \quad [105])$$

La réciproque est immédiate.
Conclusion. L'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$n \equiv 1 \quad [3], \text{ et } n \equiv 1 \quad [5], \text{ et } n \equiv 1 \quad [7]$$

est exactement l'ensemble des entiers relatifs congrus à 1 modulo 105, càd : $\{1 + 105k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [10] \\ x \equiv 7 \quad [12] \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x est solution du système, alors il existe deux entiers relatifs n et m tels que :

$$x = 3 + 10n \qquad \text{et} \qquad x = 7 + 12m$$

Par suite : $10n - 12m = 4$, soit : $5n - 6m = 2$. Le couple $(-2, -2)$ est solution de cette équation, et la solution générale de l'équation homogène $5n - 6m = 0$ est $\{(6k, 5k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ (puisque $5 \wedge 6 = 1$).

On en déduit que la solution générale de $10n - 12m = 4$ est : $\{(-2 + 6k, -2 + 5k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Par conséquent, si x est solution du système, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = 3 + 10(-2 + 6k) = -17 + 60k \text{ c'est-à-dire : } x \equiv -17\,[60] \text{ soit encore : } x \equiv 43\,[60]$$

En résumé, on a établi l'implication : $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [10] \\ x \equiv 7 \quad [12] \end{cases} \Longrightarrow x \equiv 43\,[60]$. La réciproque est immédiate.

Conclusion. $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [10] \\ x \equiv 7 \quad [12] \end{cases} \Longleftrightarrow x \equiv 43\,[60]$

4/ Soient $a \in \mathbb{Z}$ un entier quelconque, p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts.

Montrer que :

$$[a \wedge p_1 p_2 = 1] \Longleftrightarrow [a \wedge p_1 = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge p_2 = 1]$$

Supposons que $a \wedge p_1 p_2 = 1$. Selon le théorème de Bezout, on en déduit qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que :

$$au + p_1 p_2 v = 1$$

On peut judicieusement réécrire cette relation

$$au + p_1 v_1 = 1 \text{ (avec } v_1 = p_2 v \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad au + p_2 v_2 = 1 \text{ (avec } v_2 = p_1 v \in \mathbb{Z})$$

On déduit de l'écriture de gauche que a et p_1 sont premiers entre eux, et de celle de droite que a et p_2 sont premiers entre eux.

On a donc établi que : $[a \wedge p_1 p_2 = 1] \Longrightarrow [a \wedge p_1 = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge p_2 = 1]$.

Réciproquement, supposons que a et p_1 sont premiers entre eux, et que a et p_2 sont premiers entre eux.

Les diviseurs (dans $\mathbb{N}$) de $p_1 p_2$ sont exactement 1, p_1, p_2 et $p_1 p_2$.

Si p_1 divisait a, alors $p_1 \wedge a \neq 1$: contradiction avec l'énoncé. Donc p_1 ne divise pas a.

Si p_2 divisait a, alors $p_2 \wedge a \neq 1$: contradiction avec l'énoncé. Donc p_2 ne divise pas a.

A fortiori, $p_1 p_2$ ne divise pas a...

On en déduit que le seul diviseur commun (dans $\mathbb{N}$) à a et $p_1 p_2$ est 1. D'où : $a \wedge p_1 p_2 = 1$.

Ce qui achève la preuve de l'implication : $[a \wedge p_1 p_2 = 1] \Longleftarrow [a \wedge p_1 = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge p_2 = 1]$.

Conclusion. $[a \wedge p_1 p_2 = 1] \Longleftrightarrow [a \wedge p_1 = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge p_2 = 1]$.

EXERCICE 3 — (CALCUL MATRICIEL).

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/n}$ et A_n la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie en posant :

$$A_n = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ en posant } a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$$

1/ Ecrire la matrice A_2. Montrer que A_2 est inversible, et préciser son inverse.

Lorsque $n = 2$, on a : $\omega = \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$, et : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Puisque $\det(A_2) = -2 \neq 0$, on a : $A_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et : $A_2^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion. $A_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et $A_2^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2/ Le cas $n = 3$. On note $\overline{A_3} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

a/ Calculer $A_3 \times \overline{A}_3$.

Lorsque $n = 3$, on a : $\omega = \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/3} = \mathrm{j}$, et : $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j}^4 \end{pmatrix}$

Puisque $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}$, et $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$, on peut écrire :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \bar{\mathrm{j}} \\ 1 & \bar{\mathrm{j}} & \mathrm{j} \end{pmatrix}$$

Par suite, et en utilisant les identités $1 + \mathrm{j} + \overline{JC} = 0$ et $\mathrm{j} \times \overline{JC} = 1$, on obtient :

$$A_3 \times \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \bar{\mathrm{j}} \\ 1 & \bar{\mathrm{j}} & \mathrm{j} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\mathrm{j}} & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j} & \bar{\mathrm{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion. $A_3 \times \overline{A}_3 = 3\mathrm{I}_3$

b/ Etablir que $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

Selon la question précédente, $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et $A_3^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{A}_3$.

3/ Le cas général. On revient au cas général, dans lequel n désigne un entier naturel $\geqslant 3$ quelconque.

Etablir que $A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

Soit n un entier naturel $\geqslant 3$. Notons $P = A_n \times \overline{A_n}$.

➤ Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A_n)_{ik} \left(\overline{A_n}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \overline{\omega^{(k-1)(j-1)}} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(1-j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{(i-j)}\right)^k =_{\omega^{(i-j)} \neq 1} \frac{1 - \left(\omega^{(i-j)}\right)^n}{1 - \omega^{(i-j)}} = 0 \qquad (\spadesuit)$$

➤ Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$P_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A_n)_{ik} \left(\overline{A_n}\right)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \overline{\omega^{(k-1)(i-1)}} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad (\clubsuit)$$

➤ Selon $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ P_{ij} = n\delta_{ij}$. Ce qui signifie que : $P = n\mathrm{I}_n$, càd : $A_n \times \overline{A_n} = n\mathrm{I}_n$.

On en déduit que A_n est inversible, et $A_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A_n}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A_n}$

Exercice 4 — (Une famille d'intégrales)

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels on pose :

$$J\,(p,q) = \int_0^1 t^p\,(1-t)^q\;\mathrm{d}t$$

1/ Soit p un entier naturel. Calculer $J(p,0)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a : $J(p,0) = \displaystyle\int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}\left[t^{p+1}\right]_0^1$.

Conclusion. $\forall\, p \in \mathbb{N},\;\; J(p,0) = \dfrac{1}{p+1}$

2/ Soient p et q deux entiers naturels. A l'aide d'un changement de variable, établir que :

$$J\,(p,q) = J\,(q,p)$$

Via le changement de variable $u = 1-t$, on obtient :

$$J\,(p,q) = \int_1^0 (1-u)^p u^q \times (-1)\mathrm{d}u = \int_0^1 u^q (1-u)^p\,\mathrm{d}u = J\,(q,p)$$

Conclusion. $\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\quad J\,(p,q) = J\,(q,p)$

3/ Soient p et q deux entiers naturels. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$J\,(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}\,J\,(p+1,q)$$

Soient p et q deux entiers naturels. On a : $J\,(p,q+1) = \displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^{q+1}\;\mathrm{d}t$.

Pour tout réel $t \in [0,1]$, posons : $u(t) = (1-t)^{q+1}$ et $v(t) = \dfrac{1}{p+1}t^{p+1}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et pour tout réel $t \in [0,1]$ on a :

$$u'(t) = -(q+1)(1-t)^q \text{ et } v'(t) = t^p$$

La formule d'intégration par parties donne alors :

$$J\,(p,q+1) = \frac{1}{p+1}\underbrace{\left[(1-t)^{q+1}\,t^{p+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{q+1}{p+1}\underbrace{\int_0^1 t^{p+1}\,(1-t)^q\;\mathrm{d}t}_{=J(p+1,q)}$$

Conclusion. $\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\quad J\,(p,q+1) = \dfrac{q+1}{p+1}\,J\,(p+1,q)$

4/ Etablir que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ J(p,q) = \frac{p! \times q!}{(p+q+1)!}$$

La récurrence est un peu originale à écrire...

Pour tout entier naturel q, posons :

$$P(q) : \text{“}\forall p \in \mathbb{N},\ J(p,q) = \frac{p! \times q!}{(p+q+1)!}\text{”}$$

➤ **Initialisation ($q=0$)**. Soit p un entier naturel. On a : $J(p,0) = \dfrac{1}{p+1}$ (question 1).

Par ailleurs : $\dfrac{p! \times q!}{(p+q+1)!} = \dfrac{p!}{(p+1)!} = \dfrac{1}{p+1}$.

L'entier p étant arbitraire dans ce petit raisonnement, on a établi que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J(p,0) = \frac{p! \times 0!}{(p+0+1)!} \qquad \text{D'où } P(0) \text{ est vraie.}$$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(q)$ vraie pour un certain entier naturel q, et soit p un entier naturel quelconque.

On a : $J(p,q+1) = \dfrac{q+1}{p+1} J(p+1,q)$ (question 3).

Or : $J(p+1,q) = \dfrac{(p+1)! \times q!}{(p+q+2)!}$ (hypothèse de récurrence).

Par conséquent : $J(p,q+1) = \dfrac{q+1}{p+1} \times \dfrac{(p+1)! \times q!}{(p+q+2)!} = \dfrac{p! \times (q+1)!}{(p+q+2)!}$

L'entier p étant arbitraire dans ce raisonnement, on a établi que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J(p,q+1) = \frac{p! \times (q+1)!}{(p+q+2)!} \qquad \text{D'où } P(q+1) \text{ est vraie.}$$

D'où $P(q+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve de l'hérédité.

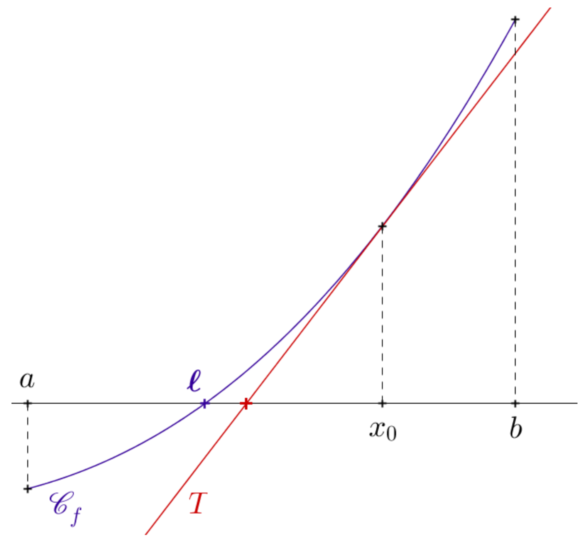
Conclusion. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ J(p,q) = \dfrac{p! \times q!}{(p+q+1)!}$

Problème 1 — (Résolution approchée d'équation).

On se donne deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que :

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$
- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
- Pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$



Partie A - Deux questions préliminaires

1/ Etablir que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\ell \in]a, b[$.

Par hypothèse, f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = 0$. L'unicité de ce réel provient de la stricte croissance de f, fournie par l'hypothèse $f' > 0$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\ell \in [a, b]$.

2/ Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. L'abscisse recherchée est donc le réel x tel que :

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \qquad \text{soit :} \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Conclusion. L'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Partie B - Etude d'une fonction contractante

Pour tout $x \in [a, b]$, on pose : $\qquad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}.$

3/ Justifier brièvement que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

Par hypothèse (f est $\mathscr{C}^2$, f' ne s'annule pas sur $[a, b]$) ; d'après les théorèmes généraux, g est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

4/ Calculer $g(\ell)$ et $g'(\ell)$.

On a :

$$g(\ell) = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \Longleftrightarrow g(\ell) = \ell$$

Par ailleurs, pour tout réel $x \in [a, b]$ on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{(f'(x))^2 - (f'(x))^2 + f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Il s'ensuit que : $g'(\ell) = 0$.

Conclusion. $g(\ell) = \ell$ et $g'(\ell) = 0$.

5/ Justifier qu'il existe un réel $h > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - h, \ell + h], \; |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

On a : $g'(\ell) = 0$, et g' est continue en ℓ. Par suite : $\lim\limits_{x \longrightarrow \ell} g'(x) = 0$.

On conclut grâce à la définition de limite.

Conclusion. Il existe un réel $h > 0$ tel que $\forall x \in [\ell - h, \ell + h], \; |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

6/ On note I l'intervalle $[\ell - h, \ell + h]$. Montrer que :

$$\forall x \in I, \; g(x) \in I$$

Soit $x \in I$. On a : $|x - \ell| \leqslant h$.

Par ailleurs, il résulte de la question précédente que g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I. Par suite :

$$|g(x) - g(\ell)| \leqslant \frac{1}{2} |x - \ell|$$

Puisque ℓ est un point fixe de g (question 3-b), et que $|x - \ell| \leqslant h$, on en déduit que :

$$|g(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{2} h \leqslant h$$

Ce qui signifie exactement que $g(x) \in I$.

Conclusion. I est stable par g.

Partie C - Etude d'une suite récurrente

On définit une suite u en posant :

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$$

7/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$

Par une récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

8/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2} \times |u_n - \ell|$

Soit n un entier naturel quelconque. D'après la question 5, la fonction g est 1/2-lipschtzienne sur I. Il s'ensuit que :

$$|g(u_n) - g(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \qquad \text{Par suite : } |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell|$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ell|$.

9/ Etablir que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Une nouvelle récurrence évidente donne : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \times |u_0 - \ell|$.

On en déduit que la suite u est convergente et a pour limite ℓ.
Conclusion. La suite u est convergente, et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Partie D - Programmation en Python

Dans cette partie, on considère la fonction $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en posant :

$$\forall\, x \in [1,2], \qquad f(x) = x^2 - 2$$

On admet que f satisfait les conditions énoncées au début du problème.

Par ailleurs, on note g la fonction définie sur $[1,2]$ en posant :

$$\forall\, x \in [1,2], \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

10/ Montrer que : $\quad \forall\, x \in [1,2], \quad |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

La fonction g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1,2]$, et pour tout réel x de $[1,2]$ on a :

$$g(x) = \frac{x^2+2}{2x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

Il est immédiat que g' est croissante sur $[1,2]$, d'où : $\forall\, x \in\ [1,2],\ \ g'(1) \leqslant g'(x) \leqslant g'(2)$.

D'où : $\forall\, x \in\ [1,2],\ \ -\dfrac{1}{2} \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

En particulier : $\forall\, x \in\ [1,2],\ \ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\forall\, x \in\ [1,2],\ \ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

11/ On souhaite définir en langage Python une fonction SUITE(n), qui reçoit comme paramètre un entier naturel n et qui retourne la valeur de u_n, la suite (u_n) étant définie en posant :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in\ \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = g(u_n)$$

a/ Ci-dessous le code complété de la fonction proposée dans l'énoncé.

```
# Définition de la fonction g

def g(x):
    return (x**2 +2)/(2 * x)

# Définition de la fonction "SUITE"

def SUITE(n):
    u =1
    for k in range(n):
        u =g(u)
    return u
```

b/ Ecrire une instruction permettant de définir la liste L des 100 premières valeurs de la suite u.

```
L =[ SUITE(compteur) for compteur in range(100) ]
```