# Devoir surveillé n$^0$12 — Mathématiques

➤ *La durée du devoir est de 4 heures, les calculatrices sont interdites.*

➤ *Le sujet est rédigé sur 4 pages, et est constitué de 3 exercices et de 2 problèmes.*

➤ *N'oubliez pas de numéroter vos copies, d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question…*

---

**Exercice 1** — **(Applications du cours sur les polynômes).** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

**1**/ Déterminer la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $P = X^4 - X$.

**2**/ Soit $n$ un entier naturel. Calculer le reste dans la division euclidienne de $X^n$ par $(X+1)^2$.

**3**/ **A propos des coefficients et des dérivées successives d'un polynôme.**

**a**/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Justifier que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!], \quad a_k \times (k!) = P^{(k)}(0)$$

**b**/ Montrer que l'application :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 \\ Q & \longmapsto & (Q(0), Q'(0), Q''(0), Q'''(0)) \end{array}$$

est bijective.

**4**/ On considère le polynôme : $\quad P = 2X^4 - 9X^3 + 15X^2 - 11X + 3.$

**a**/ Etablir que 1 est racine de $P$ de multiplicité exactement égale à 3.

**b**/ Quel est le reste dans la division euclidienne de $P$ par $(X-1)^2$ ?

**Exercice 2** — **(Application du cours sur la dérivabilité (TAF)).** A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \arctan(x) \leqslant x$$

**Exercice 3** — **(Applications du cours sur les développements limités).**

**1**/ Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto \left(x^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.

**2**/ Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \longmapsto \ln\left(\cos(x)\right)$.

## Exercice 4 — (Etude d'une fonction).

Dans cet exercice, on notera th la fonction tangente hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Par ailleurs, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\ \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**1**/ Etudier la parité de $f$.

**2**/ Rappeler un équivalent de sh en 0, et en déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**3**/ Déterminer la limite de $f$ en 0.

**4**/ Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout réel $x$ non-nul on a :

$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

**5**/ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$.

**6**/ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{th}(t) < t$.

**7**/ En déduire le tableau de variation de $f$.

**8**/ Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $\varphi : X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh} X}{X}$ .

**9**/ En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, la fonction $f$ admet un développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où $a_0, \cdots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

**10**/ Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction notée $F$ ; puis établir que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

## Problème 1 — Polynômes de Tchebychev et approximation uniforme

*L'objectif principal de ce problème est de montrer que toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un segment peut être approchée par une fonction polynomiale, pour peu que l'on choisisse correctement ce polynôme, et qu'il soit de degré suffisamment grand. Les polynômes "idéaux" pour cette approximation sont ceux de Tchebychev ; la définition et l'étude des propriétés algébriques de ces polynômes constituent la première partie du problème. La seconde est plutôt consacrée à l'étude de quelques unes de leurs propriétés analytiques. La dernière partie consiste à préciser ce que l'on entend par "approximation", puis à réaliser cette approximation.*

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0 = 1,\, T_1 = X, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.

Tout au long du problème, on pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée.

### Partie I — Etude des polynômes de Tchebychev : degré, coefficient dominant, racines

**1**/ Expliciter $T_2$ et $T_3$.

**2**/ Pour tout entier naturel $n$, déterminer le degré de $P$ et son coefficient dominant.

**3**/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

*Dans la suite du problème, on pourra admettre que l'on a aussi :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

**4**/ Soit $n$ un entier naturel. Déduire de la question précédente les valeurs de $T_n(1)$ et de $T'_n(1)$.

**5**/ Soit à présent $n$ un entier naturel non nul. Déterminer les racines de $T_n$ appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Combien y en a-t-il ? Comment justifier que ces racines sont simples et qu'il n'y en a pas d'autres ?

**6**/ Etudier la parité * du polynôme $T_n$ en fonction de la parité de l'entier naturel $n$.

**7**/ Soit $n$ un entier naturel non nul, et $x$ un nombre réel. Montrer que : $|x| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |T_n(x)| \leqslant 1$.

### Partie II — Norme des polynômes de Tchebychev

On rappelle que selon le théorème des bornes atteintes, toute fonction $f$ continue sur $[-1, 1]$ est bornée et atteint ses bornes. On convient alors de noter $\|f\| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Par ailleurs dans la suite du problème, on suppose que $n$ est un entier naturel non nul.

**8**/ Etablir que l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède exactement $(n + 1)$ solutions dans $\mathbb{R}$, que l'on notera $a_0,\ldots, a_n$ (avec $a_0 > a_1 > \cdots > a_n$).

**9**/ Pour tout $k$ dans $[\![ 0, n ]\!]$, calculer $T_n(a_k)$.

**10**/ On pose à présent $\widetilde{T}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$, et on note $\mathbf{P}_n$ l'ensemble des polynômes *unitaires* † de $\mathbb{R}[X]$ de degré exactement égal à $n$. Il est clair que $\widetilde{T}_n \in \mathbf{P}_n$.

---

*. Par parité du polynôme, on entend parité de la fonction polynomiale associée.

†. On appelle polynôme unitaire un polynôme de coefficient dominant égal à 1. Par exemple $P = X^2 - 3X + 4$ est unitaire mais pas $2X^3 - 5X + 1$.

**a**/ Calculer $\left\|\widetilde{T}_n\right\|$.

On veut prouver que $\widetilde{T}_n$ est un polynôme de $\mathbf{P}_n$ tel que la quantité $\left\|\widetilde{T}_n\right\|$ soit minimale. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un polynôme $P$ appartenant à $\mathbf{P}_n$ tel que : $\|P\| < \left\|\widetilde{T}_n\right\|$. Le but des deux questions ci-dessous est d'aboutir alors à une contradiction.

**b**/ On pose $D = \widetilde{T}_n - P$. Que dire du degré de $D$ ?

**c**/ Etudier le signe de $D\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$ pour $k \in [\![ 0, n ]\!]$. Conclure.

## Partie III — Approximation uniforme d'une fonction continue

Soit $n$ un entier naturel non nul, et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $(n+1)$ réels distincts du segment $[-1, 1]$.

On pose pour tout $k \in [\![ 0, n ]\!]$ : $L_k = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}$.

**11**/ Soit $k$ un entier naturel arbitraire. Quel est le degré de $L_k$ ?

**12**/ Etablir que pour tout $\forall k \in [\![ 0, n ]\!]$, $\forall i \in [\![ 0, n ]\!]$, $L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$.

**13**/ Soit $f$ une fonction définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs réelles. On pose : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_k) L_k$.

Montrer que $P$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![ 0, n ]\!]$, $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

**14**/ On désire maintenant mesurer la qualité de l'approximation réalisée lorsque l'on approche la fonction $f$ par le polynôme $P$ défini ci-dessus. Pour cela, on suppose (jusqu'à la fin du problème) que $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$, et on pose par ailleurs :

$$\Pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (X - \alpha_i)$$

On veut prouver qu'il existe un réel $\beta \in [-1, 1]$ tel que : $f(x) - P(x) = \dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta) \qquad (\star)$

**a**/ Soit $x \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$. Etablir le résultat $(\star)$.

**b**/ Soit à présent $x \in [-1, 1]$, $x \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$. On introduit la fonction $F$ définie par :

$$\forall t \in [-1, 1],\ F(t) = f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$$

avec $K$ constante réelle choisie de sorte que : $F(x) = 0$.
Justifier l'existence de la constante $K$ et observer que $F$ possède au moins $(n+2)$ valeurs d'annulation distinctes. En déduire l'existence d'un réel $\beta \in [-1, 1]$ tel que : $F^{(n+1)}(\beta) = 0$. Conclure.

**c**/ En déduire que : $\|f - P\| \leqslant \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|$.