Corrigé du DS n^{0}11 — Mathématiques

Exercice 1 — **(Applications du cours sur les polynômes).** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Déterminer la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $P = X^4 - X$.

On a : $P = X\left(X^3-1\right) = X(X-1)(X-\mathrm{j})\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right) = X(X-1)\left(X^2+X+1\right)$.

Conclusion. La décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = X(X-1)(X-\mathrm{j})\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right).$$

La décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est : $P = X(X-1)\left(X^2+X+1\right)$.

2/ Soit n un entier naturel. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X+1)^2$.

Soit n un entier naturel. Selon le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\exists!\ (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ X^n = (X+1)^2 Q + R \text{ avec } \deg R \leqslant 1$$

Par suite, il existe deux scalaires a et b tels que :

$$X^n = (X+1)^2 Q + aX + b \qquad (\spadesuit)$$

L'évaluation de $(\spadesuit)$ en (-1) donne : $(-1)^n = b - a$.

Par ailleurs, en dérivant formellement $(\spadesuit)$, on obtient :

$$nX^{n-1} = 2(X+1)Q + (X+1)^2 Q' + a \qquad (\clubsuit)$$

L'évaluation de $(\clubsuit)$ en (-1) donne : $n(-1)^{n-1} = a$.

Ainsi :

$$\begin{cases} a = n(-1)^{n-1} \\ b - a = (-1)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = n(-1)^{n-1} \\ b = (-1)^n + n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X+1)^2$ est : $n(-1)^{n-1}X + (-1)^n + n(-1)^{n-1}$

3/ A propos des coefficients et des dérivées successives d'un polynôme.

a/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Justifier que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k \times (k!) = P^{(k)}(0)$$

Selon la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$: $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

Par identification, on en déduit que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Conclusion. $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k \times (k!) = P^{(k)}(0)$.

b/ Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 \\ & Q & \longmapsto & (Q(0), Q'(0), Q''(0), Q'''(0)) \end{array}$$

est bijective.

Soient P et Q dans $\mathbb{K}_3[X]$, tels que : $F(P) = F(Q)$. Posons $R = P - Q$.

Il résulte des hypothèses que $R \in \mathbb{K}_3[X]$ (P et Q étant de degré au plus 3) et que : $R(0) = R'(0) = R''(0) = R'''(0) = 0$ (puisque $F(P) = F(Q)$ et par linéarité de la dérivation).

Or, selon la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_3[X]$: $R = R(0) + R'(0)X + \dfrac{R''(0)}{2}X^2 + \dfrac{R'''(0)}{6}X^3$.

On en déduit que : $R = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. D'où : $P = Q$.

En résumé : $F(P) = F(Q) \Longrightarrow P = Q$. L'application F est donc injective.

Prouvons la surjectivité de F. Soit $(x, y, z, t) \in K^4$.

Posons :

$$P = x + yX + \frac{z}{2}X^2 + \frac{t}{6}X^3$$

Il est clair que $P \in \mathbb{R}_3[X]$, et selon la question précédente :

$$P(0) = x\,; \qquad P'(0) = y\,; \qquad P''(0) = z\,; \qquad P'''(0) = t$$

En d'autres termes : $F(P) = (x, y, z, t)$. Ce qui prouve la surjectivité de F.

Conclusion. L'application F est bijective.

4/ On considère le polynôme : $P = 2X^4 - 9X^3 + 15X^2 - 11X + 3.$

a/ Etablir que 1 est racine de P de multiplicité exactement égale à 3.

On a : $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. En outre : $P''' = 48X - 54$. D'où : $P'''(1) \neq 0$.

Conclusion. 1 est racine de P de multiplicité exactement égale à 3.

b/ Quel est le reste dans la division euclidienne de P par $(X-1)^2$?

D'après la question précédente, P est multiple de $(X-1)^3$. A fortiori, P est multiple de $(X-1)^2$.

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $0_{\mathbb{K}[X]}$.

Exercice 2 — **(Application du cours sur la dérivabilité (TAF)).** A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \arctan(x) \leqslant x$$

Pour $x=0$, l'encadrement est trivial.

Soit x un réel strictement positif. Selon les théorèmes généraux, la fonction arctan est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists\, c \in\,]0,x[, \quad \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(x)}{x}$$

D'où : $\arctan(x) = \dfrac{x}{1+c^2}$. Or : $\dfrac{x}{1+c^2} \leqslant x$.

Comme en outre la fonction arctan est positive sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure.

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \arctan(x) \leqslant x$

Exercice 3 — (Applications du cours sur les développements limités).

1/ Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Selon le cours, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

Par conséquent, pour tout réel x on a :

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2-1\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = -1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)$

2/ Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \longmapsto \ln\left(\cos(x)\right)$.

Soit x un réel "proche de zéro", par exemple dans $I = \,]-1,1\,[$. *

On a : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$.

D'où : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs : $\ln(1-X) = -X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$.

En posant $X = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$ dans la relation $(\spadesuit)$, on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o\left(x^4\right)$$

∗. Pour s'assurer que le réel $\ln(\cos(x))$ est bien défini.

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\, x \in I, \quad \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)}$

EXERCICE 4 — (ETUDE D'UNE FONCTION).

Dans cet exercice, on notera th la fonction tangente hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

Par ailleurs, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\,\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1/ Etudier la parité de f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro, et pour tout réel non-nul x on a :
$f(-x) = (-x)\text{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) \underset{\text{sh impaire}}{=} x\,\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$. $\boxed{\textbf{Conclusion} : f \text{ est une fonction paire}}$.

2/ Rappeler un équivalent de sh en 0, et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'après le cours : $\text{sh}\, x \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x$. On en déduit que $\text{sh}\,\frac{1}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, et donc $f(x) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} 1$ d'où en particulier : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$, et puisque f est paire, on a aussi : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

3/ Déterminer la limite de f en 0.

En utilisant la définition de la fonction sh : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} \frac{x\mathrm{e}^{1/x} - x\mathrm{e}^{-1/x}}{2}$. Or $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} x\mathrm{e}^{1/x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} x\mathrm{e}^{-1/x} = 0$ †. On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} f(x) = +\infty}$ et de nouveau par parité : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x<0}} f(x) = +\infty}$.

4/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout réel x non-nul on a :

$$f'(x) = \left[\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction f est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \; f'(x) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right]$$

†. D'après le critère des croissances comparées.

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]}$$

5/ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{th}' = \dfrac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2}$. La relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique fournit la conclusion.

$$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}}$$

6/ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{th}(t) < t$.

Pour tout réel positif ou nul t, on pose : $\varphi(t) = \mathrm{th}(t) - t$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les théorèmes généraux, et pour tout réel positif ou nul t on a : $\varphi'(t) = -\mathrm{th}^2(t)$. On en déduit que la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\varphi(0) = 0$, la fonction φ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Explicitement : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{th}(t) - t < 0$, d'où : $\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{th}(t) < t}$.

7/ En déduire le tableau de variation de f.

D'après la question 4, la fonction f' est sur $\mathbb{R}_+^*$ du signe de $\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$ puisque la fonction ch est à valeurs strictement positives. Or, d'après la question 6 : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{th}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$. Il s'ensuit que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, d'où le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

8/ Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $\varphi : X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh} X}{X}$.

D'après le cours : $\forall\, X \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(X) = X + \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^5}{120} + o\left(X^5\right)$, d'où : $\boxed{\forall\, X \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \dfrac{X^2}{6} + \dfrac{X^4}{120} + o\left(X^4\right)}$.

9/ En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, la fonction f admet un développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où $a_0, \cdots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

D'après la question précédente : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{120x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)}$.

10/ Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction notée F ; puis établir que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par hypothèse : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$. Or d'après la question 2 : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$. Donc F peut être prolongée par continuité en 0, en posant $\boxed{F(0) = 1}$.

Avec ce prolongement : $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)}{x} = \dfrac{x}{6}+\dfrac{x^3}{120}+o\left(x^3\right)$ d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=0$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } F'(0)=0}$.

Problème 1 — Polynômes de Tchebychev et approximation uniforme

L'objectif principal de ce problème est de montrer que toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un segment peut être approchée par une fonction polynomiale, pour peu que l'on choisisse correctement ce polynôme, et qu'il soit de degré suffisamment grand. Les polynômes "idéaux" pour cette approximation sont ceux de Tchebychev ; la définition et l'étude des propriétés algébriques de ces polynômes constituent la première partie du problème. La seconde est plutôt consacrée à l'étude de quelques unes de leurs propriétés analytiques. La dernière partie consiste à préciser ce que l'on entend par "approximation", puis à réaliser cette approximation.

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0=1,\ T_1=X,\ \text{et}\ \forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$$

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.

Tout au long du problème, on pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée.

Partie I — Etude des polynômes de Tchebychev : degré, coefficient dominant, racines

1) D'après l'énoncé : $T_2=2XT_1-T_0 \Longleftrightarrow \boxed{T_2=2X^2-1}$.

Puis : $T_3=2XT_2-T_1 \Longleftrightarrow \boxed{T_3=4X^3-3X}$.

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(T_n)=n$ et $\mathrm{cd}(T_n)=2^{n-1}$ par récurrence double sur n. Notons :

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\deg(T_n)=n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n)=2^{n-1}\text{”}$$

➤ Initialisation (pour $n=1$ et $n=2$) : on a $T_1=X$ et $T_2=2X^2-1$. On observe que $\deg(T_1)=1$ et $\deg(T_2)=2$; et $\mathrm{cd}(T_1)=2^0$ et $\mathrm{cd}(T_2)=2^1$. Donc les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel non nul n. On exploite alors la relation $T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$.

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de $2XT_{n+1}$ est par hypothèse de récurrence, égal à $1+(n+1)=n+2$; tandis que celui de T_n est égal à n (toujours par hypothèse de récurrence).
Puisque $\deg(2XT_{n+1})>\deg(T_n)$, on en déduit d'une part que $\deg(2XT_{n+1}-T_n)=\deg(2XT_{n+1})=n+2$, et d'autre part que : $\mathrm{cd}(2XT_{n+1}-T_n)=\mathrm{cd}(2XT_{n+1})=2\mathrm{cd}(T_{n+1})$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{cd}(T_{n+1})=2^n$, donc : $\mathrm{cd}(2XT_{n+1})=2^{n+1}$.

En résumé, on a établi que : $\deg(T_{n+2})=n+2$ et $\mathrm{cd}(T_{n+2})=2^{n+1}$, ce qui signifie que la propriété $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(T_n)=n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n)=2^{n-1}}$

3) Pour faire preuve d'originalité, prouvons la propriété $\mathrm{P}(n)$: "$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$" par récurrence sur n.

➤ Initialisation (pour $n = 0$ et $n = 1$) : d'une part $T_0 = 1$ d'où pour tout réel θ on a : $T_0(\cos(\theta)) = 1$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(0 \times \theta) = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part $T_1 = X$ d'où pour tout réel θ on a : $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel non nul n. Alors, pour tout réel θ on a :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos(n\theta)} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

Ce qui assure que la propriété $P(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall\,n \in \mathbb{N},\ \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

4) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente : $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0)$

d'où : **Conclusion** : $\forall\,n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$.

Considérons à présent la fonction $F : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto T_n(\cos(\theta))$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont, et : $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ F'(\theta) = -\sin(\theta)\,T'_n(\cos(\theta))$.

Comme par ailleurs on a : $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on peut affirmer que : $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ F'(\theta) = -n\sin(n\theta)$.

En identifiant les deux expressions obtenues pour F', on a : $\sin(\theta)\,T'_n(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta)$.

Alors, pour tout réel θ (non multiple de π) on a : $T'_n(\cos(\theta)) = \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

Il reste à observer que $T'_n(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} T'_n(x)$ (puisque T_n est polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$ donc en particulier $\mathscr{C}^1$) pour obtenir : $T'_n(1) = \lim\limits_{\theta \longrightarrow 0} \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$. Comme $\sin(\theta) \underset{0}{\sim} \theta$ et $\sin(n\theta) \underset{0}{\sim} n\theta$, on en déduit que $\dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \underset{0}{\sim} n^2$, ce qui entraîne $\lim\limits_{\theta \longrightarrow 0} \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n^2$ et donc : $\boxed{\forall\,n \in \mathbb{N},\ T'_n(1) = n^2}$

5) Soit n un entier naturel non nul. On cherche les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Soit donc x un réel de cet intervalle tel que : $T_n(x) = 0$. Puisque x est compris entre -1 et 1, il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors :

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\,\pi}{2n}$$

Posons alors, pour tout $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}$. Il est clair que les réels θ_k sont n réels distincts de $[0, \pi]$. Puisque la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective, les réels $(\cos(\theta_k))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ sont n réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$; qui plus est, ce sont (par construction) n racines distinctes du polynôme T_n. Comme T_n est de degré n (cf question 2), on peut conclure qu'il n'y en a pas d'autres.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n possède n racines distinctes (donc simples puisque T_n est de degré n) qui sont les réels : $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$.

6) Au regard des premiers termes de la suite, on peut facilement conjecturer que T_{2n} est pair tandis que T_{2n+1} est impair. On prouve par récurrence sur n la propriété $P(n)$: "T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair".

➤ Initialisation (pour $n = 0$) : triviale puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.

➤ Hérédité : soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair.

Alors : $T_{2n+2} = 2XT_{2n+1} - T_{2n}$ est la différence entre $2XT_{2n+1}$ qui est pair (en tant que produit de polynômes impairs) et T_{2n} également pair. Par suite T_{2n+2} est pair.

Puis : $T_{2n+3} = 2XT_{2n+2} - T_{2n+1}$ est la différence entre $2XT_{2n+2}$ qui est impair (en tant que produit de polynômes de parités différentes) et T_{2n+1} également impair. Par suite T_{2n+3} est impair.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout entier naturel n, le polynôme T_n a la même parité que n.

7) Soient n un entier naturel non nul, et x un nombre réel.

➤ Supposons $|x| \leqslant 1$: alors existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. Donc $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. En particulier $|T_n(x)| \leqslant 1$ puisque $|\cos(n\theta)| \leqslant 1$.

On a ainsi établi que : $\boxed{|x| \leqslant 1 \Longrightarrow |T_n(x)| \leqslant 1 \quad (\spadesuit)}$

➤ Si $|x| > 1$: alors il existe un réel $\theta > 0$ tel que $x = \mathrm{ch}(\theta)$. Donc $T_n(x) = T_n(\mathrm{ch}(\theta)) = \mathrm{ch}(n\theta)$. En particulier $|T_n(x)| > 1$ puisque $|\mathrm{ch}(n\theta)| > 1$ dès lorsque n et θ sont non nuls.

On a ainsi établi que : $\boxed{|x| > 1 \Longrightarrow |T_n(x)| > 1 \quad (\clubsuit)}$

Conclusion : d'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), pour tout entier naturel n non nul : $|x| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |T_n(x)| \leqslant 1$.

Partie II — Norme des polynômes de Tchebychev

8) Soit n un entier naturel non nul, et soit x un nombre réel. Supposons que $|T_n(x)| = 1$. Alors en particulier : $|T_n(x)| \leqslant 1$ (wouaouh), donc $|x| \leqslant 1$. Pour la troisième fois depuis le début de ce problème, on en déduit l'existence et l'unicité d'un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

Par suite : $|T_n(x)| = 1 \Longleftrightarrow |\cos(n\theta)| = 1 \Longleftrightarrow n\theta \equiv 0\ [\pi] \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{k\pi}{n}$.

Les solutions de l'équation $|T_n(x)| = 1$ sont donc tous les réels $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à voir que cet ensemble ne contient qu'un nombre fini de valeurs, obtenues en faisant parcourir à k l'ensemble $[\![\, 0, n \,]\!]$. En effet, pour tout entier $k \in [\![\, 0, n \,]\!]$, le réel $\cos\left(\dfrac{(k+n)\pi}{n}\right)$ est égal à $\cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)$ ‡.

Conclusion : en résumé, l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède $(n+1)$ solutions dans $[-1, 1]$:

les $(n+1)$ réels $a_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![\, 0, n \,]\!]$.

9) Soit $k \in [\![\, 0, n \,]\!]$. On a : $T_n(a_k) = T_n\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ T_n(a_k) = (-1)^k$.

‡. Puisque : $\cos(X + \pi) = \cos(\pi - X) = -\cos(X)$.

10) a) Soit n un entier naturel non nul. On a : $\left\|\widetilde{T}_n\right\| = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\| = \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{2^{n-1}}\,T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|$ $(\spadesuit)$

A la lumière de la question 7, on peut déjà affirmer que : $\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| \leqslant 1$. Et puisque de plus $|T_n(x)|$ prend la valeur 1 dans $[-1,1]$ d'après la question 8, on a : $\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = 1$.

On en déduit, avec $(\spadesuit)$, que : $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\widetilde{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$. $\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left\|\widetilde{T}_n\right\| = \frac{1}{2^{n-1}}}$.

b) Le polynôme $D = \widetilde{T}_n - P$ étant la différence de deux polynômes de degré n, on a déjà : $\deg(D)\leqslant n$. Or, $\widetilde{T}_n$ et P sont de même degré (n) et ont le même coefficient dominant (égal à 1, puisqu'ils sont unitaires). Par suite : $\deg\left(\widetilde{T}_n - P\right)\leqslant n-1$. $\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(D)\leqslant n-1}$.

c) Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On a : $D(a_k) = \widetilde{T}_n(a_k) - P(a_k) = \frac{1}{2^{n-1}}\,(-1)^k - P(a_k)$.

Ne perdons pas de vue que par hypothèse : $\|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}$. D'où : $\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

En particulier : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ -\frac{1}{2^{n-1}} < P(a_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Par suite :

- ➤ si k est pair : on a $D(a_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(a_k) > 0$
- ➤ et si k est impair : on a $D(a_k) = -\frac{1}{2^{n-1}} - P(a_k) < 0$.

En appliquant n fois le lemme de Cauchy à la fonction continue (car polynomiale) D sur chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ (avec $k\in[\![0,n-1]\!]$),[§] on obtient l'existence de n scalaires $(\beta_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ tels que $D(\beta_k) = 0$.

En d'autres termes, on vient de mettre en évidence l'existence de n racines pour le polynôme D. Puisque D est de degré au plus $(n-1)$ (question b), ceci implique que $D = \tilde{0}$. D'où $\widetilde{T}_n = P$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\|P\| < \left\|\widetilde{T}_n\right\|$.

Conclusion : soit n un entier naturel non nul. Il n'existe pas de polynôme P unitaire de degré n tel que : $\|P\| < \left\|\widetilde{T}_n\right\|$.

Il revient au même d'écrire : $\forall P\in\mathbf{P}_n,\ \|P\|\geqslant\left\|\widetilde{T}_n\right\|$, ou encore : $\left\|\widetilde{T}_n\right\| = \inf_{P\in\mathbf{P}_n}\|P\|$.

Si l'on veut continuer ce dictionnaire des synonymes, on peut encore dire que pour un degré n fixé, le polynôme unitaire de degré n de norme minimale est le n-ième polynôme de Tchebychev normalisé.

Partie III — Approximation uniforme d'une fonction continue

Jusqu'à la fin du problème, n désigne un entier naturel non nul.

11) Soit $k\in[\![0,n]\!]$. A une constante multiplicative non nulle près[¶], le polynôme L_k est le produit de n polynômes de degré 1.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ \deg(L_k) = n}$.

§. Ce qui est légitime puisque $D(a_k)\,D(a_{k+1}) < 0$ d'après ce qui précède.

¶. En l'occurrence : $\prod_{j=0,\,j\neq k}^{n}\frac{1}{\alpha_k-\alpha_j}$.

12) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, et soit $i \in [\![0, n]\!]$, avec $i \neq k$. Alors : $L_k(\alpha_i) = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} = 0$ puisque l'indice j de ce produit prendra la valeur i.

En revanche : $L_k(\alpha_k) = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{\alpha_k - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} 1 = 1.$

Conclusion : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$

13) Avec les notations de l'énoncé, commençons par montrer que le polynôme P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

En premier lieu, P est de degré au plus n en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré n. Donc : $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_k) L_k(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_k)\,\delta_{ik} = f(\alpha_i)$.

Prouvons maintenant l'unicité d'un tel polynôme.
Supposons qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ Q(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

Alors : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, et les polynômes P et Q sont donc deux polynômes de degré au plus n, prenant les mêmes valeurs en $(n+1)$ points distincts. D'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux. Ce qui prouve l'unicité de P satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Conclusion : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.
Explicitement, ce polynôme est : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_k) L_k$

14) a) Si $x \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$, alors : $f(x) = P(x)$ par construction du polynôme P, et $\Pi_{n+1}(x) = 0$ par définition du polynôme Π_{n+1}. Par suite : $\boxed{\text{pour tout réel } \beta \in [-1,1], \text{ on a : } f(x) - P(x) = \dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta)}$.

b) Soit à présent $x \in [-1,1],\ x \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$, et $F : t \in [-1,1] \longmapsto f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$.

On a : $F(x) = 0 \iff f(x) - P(x) - K\Pi_{n+1}(x) = 0 \iff K = \dfrac{f(x) - P(x)}{\Pi_{n+1}(x)}$. Cette opération est rendue légitime par le fait que $\Pi_{n+1}(x) \neq 0$, le réel x étant supposé distinct de toutes les racines du polynôme Π_{n+1}.

Par définition des polynômes P et Π_{n+1} d'une part, et de la fonction f d'autre part, on peut affirmer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ F(\alpha_k) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(x) = 0$$

Puisque les α_k sont deux à deux distincts et que x n'est pas un de ces réels, on en déduit que F s'annule (au moins) $(n+2)$ fois dans $[-1,1]$. D'après le théorème de Rolle, on en déduit que F' s'annule $(n+1)$ fois dans $[-1,1]$, puis F'' s'annule n fois dans $[-1,1]$...
En bref, en appliquant itérativement $(n+1)$ fois le théorème de Rolle, on en déduit que $F^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans $[-1,1]$.

Autrement dit : $\exists\, \beta \in [-1,1],\ F^{(n+1)}(\beta) = 0 \qquad (\spadesuit)$.

Or : $\forall t \in [-1,1],\ F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P^{(n+1)}(t) - K\Pi_{n+1}^{(n+1)}(t)$.

Il reste à voir que : $\forall t \in [-1,1],\ f^{(n+1)}(t) = 0$ (dérivée $(n+1)$-ième d'un polynôme de degré au plus n).

Et $\forall t \in [-1,1],\ \Pi_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ (dérivée $(n+1)$-ième d'un polynôme unitaire de degré $n+1$).

De ces observations et de (♠), on déduit : $\exists\,\beta \in [-1,1],\ f^{(n+1)}(\beta) - K\,(n+1)! = 0$.

D'où : $f^{(n+1)}(\beta) = K\,(n+1)!$ soit : $f^{(n+1)}(\beta) = \dfrac{f(x)-P(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\,(n+1)!$

On peut (enfin !) conclure : $\boxed{\forall x \in [-1,1]\,,\ x \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}\,,\ \exists\,\beta \in [-1,1],\ f(x)-P(x) = \dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\beta)}$

De la question a) et du résultat ci-dessus on déduit finalement :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\,,\ \exists\,\beta \in [-1,1],\ f(x)-P(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\beta)}$$

c) Soit x un réel dans $[-1,1]$. D'après ce qui précède : $\exists\,\beta \in [-1,1],\ f(x)-P(x) = \dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\beta)$.

En particulier : $\exists\,\beta \in [-1,1],\ |f(x)-P(x)| = \dfrac{|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!}\,\left|f^{(n+1)}(\beta)\right| \quad$ (♠)

Puisque f est supposée de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Il s'ensuit que $\left\|f^{(n+1)}\right\| = \sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ existe (et est fini), et que naturellement : $\forall\,u \in [-1,1],\ \left|f^{(n+1)}(u)\right| \leqslant \left\|f^{(n+1)}\right\| \quad$ (♣).
Le même raisonnement s'applique à la fonction Π_{n+1} (continue sur $[-1,1]$ car polynomiale), et on a :

$$\forall\,u \in [-1,1],\ |\Pi_{n+1}(u)| \leqslant \|\Pi_{n+1}\| \quad (\heartsuit)$$

On déduit alors de (♠), (♣) et de ($\heartsuit$) que : $|f(x)-P(x)| \leqslant \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|$.

Cette inégalité étant valide pour tout réel $x \in [-1,1]$, on en déduit que : $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)-P(x)| \leqslant \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|$.

Conclusion : $\|f-P\| \leqslant \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|$