Devoir surveillé n^{0}12 — Mathématiques

La durée du devoir est de 1 heure 45, les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 — **(Fractions rationnelles).** Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1/ On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{2X^2 - 10X + 6}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$$

Dans la suite de cette question, on notera : $P = 2X^2 - 10X + 6$ et $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$.

a/ Déterminer la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme Q.

Indication. Q possède quatre racines simples, toutes réelles ; au moins deux de ces racines sont évidentes.

b/ Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

c/ Pour tout entier naturel $N \geqslant 4$, on pose :

$$S_N = \sum_{k=4}^{N} \frac{2k^2 - 10k + 6}{k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k}$$

Calculer S_N. Puis montrer que (S_N) est convergente et préciser sa limite.

2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

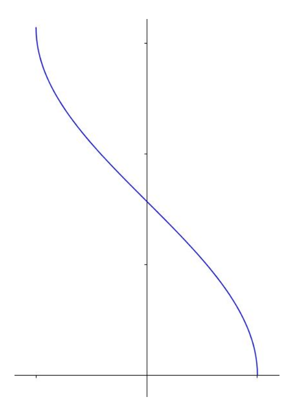
On pose : $\quad F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^{2k}}{X - \omega^k} \in \mathbb{C}(X).$

Déterminer explicitement deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $F = \dfrac{P}{Q}$.

Exercice 2 — **(Fonctions convexes).**

Dans cet exercice, on pose :

$$I =]-1, 1[\qquad \text{et} \qquad \forall x \in I, \quad f(x) = \arccos(x)$$



1/ Montrer que f est concave sur $[0, 1[$, et convexe sur $]-1, 0]$.

2/ Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - x$$

3/ Soit x un réel tel que $\dfrac{1}{2} < x < 1$. Etablir que :

$$\arccos\left(\frac{1 + 2x}{4}\right) \geqslant \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \arccos(x)$$

Exercice 3 — (Fractions rationnelles et algèbre linéaire).

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les trois polynômes :

$$P = X - 3\,; \qquad Q = X + 3\,; \qquad \text{et} \qquad R = X^2 - 9$$

1/ Démontrer que la famille $B = \{P, Q, R\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Dans $\mathbb{R}(X)$ (l'espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels), on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \text{Vect}\left(\frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}, \quad \frac{1}{R}\right)$$

a/ Etablir que si $\varphi \in F$, alors $\deg(\varphi) \leqslant 0$.

b/ Déterminer la dimension de F.

Exercice 4 — Algèbre linéaire

Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de E ; et I_2 la matrice identité de E.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$F = \text{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de F.

2/ On pose : $G = \text{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Etablir que F et G sont supplémentaires dans E.

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de E.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base **B** à la base **B'**.

5/ Donner les coordonnées de la matrice $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B**, ainsi que dans la base **B'**.