Devoir surveillé n^{0}12 — Mathématiques

Exercice 1 — (Fractions rationnelles). Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1/ On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{2X^2 - 10X + 6}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$$

Dans la suite de cette question, on notera : $P = 2X^2 - 10X + 6$ et $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$.

a/ Déterminer la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme Q.

Indication. Q possède quatre racines simples, toutes réelles ; au moins deux de ces racines sont évidentes.

La décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de Q est : $Q = X(X-1)(X-2)(X+1)$.

b/ Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

D'après la question précédente : $F = \dfrac{2X^2 - 10X + 6}{X(X-1)(X-2)(X+1)}$.

Puisque F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif n'ayant que des pôles simples, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure l'existence et l'unicité d'un quadruplet de réels (a, b, c, d) tel que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+1}$$

D'après le cours :

$$a = \frac{P(0)}{Q'(0)}\,; \qquad b = \frac{P(1)}{Q'(1)}\,; \qquad c = \frac{P(2)}{Q'(2)}\,; \qquad d = \frac{P(-1)}{Q'(-1)}$$

en ayant pris soin de noter $P = 2X^2 - 10X + 6$ et $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$. On en déduit que :

$$a = 3\,; \qquad b = 1\,; \qquad c = -1\,; \qquad d = -3$$

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F = \frac{3}{X} - \frac{3}{X+1} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2}$$

c/ Pour tout entier naturel $N \geqslant 4$, on pose :

$$S_N = \sum_{k=4}^{N} \frac{2k^2 - 10k + 6}{k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k}$$

Calculer S_N. Puis montrer que (S_N) est convergente et préciser sa limite.

Soit N un entier naturel $\geqslant 4$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=4}^{N} \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$

$$= 3\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}=\frac{3}{4}-\frac{3}{N+1}+\frac{1}{N-1}-\frac{1}{2}$$

Conclusion. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 4,\ S_N = \dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{N+1}+\dfrac{1}{N-1}$

d/ En déduire : $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = 1/4$

Avec la terminologie du chapitre sur les séries : **la série de terme général** $u_k = \dfrac{2k^2-10k+6}{k^4-2k^3-k^2+2k}$ **est convergente et a pour somme 1/4.**

2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

On pose : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^{2k}}{X-\omega^k} \in \mathbb{C}(X)$.

Déterminer explicitement deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $F = \dfrac{P}{Q}$.

Il résulte de la définition de F qu'elle possède exactement n pôles simples, qui sont les racines n-èmes de l'unité. On peut donc poser $Q = X^n - 1$.

En outre, pour tout entier k entre 0 et $n-1$, le coefficient de $\dfrac{1}{X-\omega^k}$ est ω^{2k}. Or, le pôle ω^k étant simple, le cours assure que ce coefficient est donné par la "formule magique" : $P(\omega^k)/Q'(\omega^k)$.

On en déduit que : $\dfrac{P(\omega^k)}{n\omega^{k(n-1)}} = \omega^{2k} \Longleftrightarrow P\left(\omega^k\right) = n\omega^k$.

Par suite, le polynôme $P = nX$ fait l'affaire.

Conclusion. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^{2k}}{X-\omega^k}$ est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX}{X^n-1}$.

Exercice 2 — (Fonctions convexes).

Dans cet exercice, on pose :

$$I =]-1,1[\qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in I,\quad f(x) = \arccos(x)$$

1/ Montrer que f est concave sur $[0,1[$, et convexe sur $]-1,0]$.

La fonction arccos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I (fonction usuelle). Et pour tout réel x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{puis} \qquad f''(x) = \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

On en déduit que $f''(x)$ est du signe de $(-x)$ sur I, d'où la conclusion.

Conclusion. La fonction f est concave sur $[0,1[$, et convexe sur $]-1,0]$.

2/ Montrer que :

$$\forall\, x \in \left[0,1\right[, \quad f(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - x$$

D'après la question précédente, f est concave sur $[0,1[$. En particulier, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Or la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \dfrac{\pi}{2} - x$,* d'où la conclusion.

Conclusion. $\forall\, x \in \left[0,1\right[, \quad f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} - x$

3/ Soit x un réel tel que $\dfrac{1}{2} < x < 1$. Etablir que :

$$\arccos\left(\frac{1+2x}{4}\right) \geqslant \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Il résulte de la question 1 que f =arccos est concave sur $[0,1[$. En particulier :

$$\forall\,(a,b) \in \left[0,1\right[^2,\ \forall\, t \in [0,1]\,,\ f(ta+(1-t)b) \geqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

La conclusion s'obtient en choisissant : $t = \dfrac{1}{2}$, $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = x$.

Conclusion. $\forall\, x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\,, \quad \arccos\left(\dfrac{1+2x}{4}\right) \geqslant \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 3 — (Fractions rationnelles et algèbre linéaire).

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les trois polynômes :

$$P = X - 3\,; \qquad Q = X + 3\,; \qquad \text{et} \qquad R = X^2 - 9$$

1/ Démontrer que la famille $B = \{P, Q, R\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aP + bQ + cR = 0$.

Alors : $a(X-3) + b(X+3) + c(X^2-9) = 0$. Par évaluation en 3, on a : $6b = 0$. D'où : $b = 0$.

D'où : $a(X-3) + c(X^2-9) = 0$. Par évaluation en -3, on a : $-6a = 0$. D'où : $a = 0$.

D'où : $c(X^2-9) = 0$. D'où : $c = 0$.

En résumé : $[aP + bQ + cR = 0] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$.

On en déduit que la famille B est libre. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure.

Conclusion. B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

∗. Selon le cours, en utilisant au choix l'argument suivant lequel arccos est une fonction usuelle (vous avez donc le droit de connaître l'équation de sa tangente en 0), ou en utilisant le formulaire des DL.

2/ Dans $\mathbb{R}(X)$ (l'espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels), on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \text{Vect}\left(\frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}, \quad \frac{1}{R}\right)$$

a/ Etablir que si $\varphi \in F$, alors $\deg(\varphi) \leqslant 0$.

Notons que : $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$, $\deg\left(\frac{1}{P}\right) = \deg\left(\frac{1}{Q}\right) = -1$, et $\deg\left(\frac{1}{R}\right) = -2 \qquad (\spadesuit)$.

Soit φ un élément de F. Par définition, il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\varphi = \frac{aP}{Q} + \frac{b}{P} + \frac{c}{Q} + \frac{d}{R}$$

Or d'après le cours : $\deg(\varphi) \leqslant \max\left(\deg\left(\frac{aP}{Q}\right), \deg\left(\frac{b}{P}\right), \deg\left(\frac{c}{Q}\right), \deg\left(\frac{d}{R}\right)\right)$.

La conclusion découle directement de cette majoration et de $(\spadesuit)$.

Conclusion. $\forall \varphi \in F, \ \deg(\varphi) \leqslant 0$

b/ Déterminer la dimension de F.

Puisque $X^2 - 9 = (X-3)(X+3)$, le théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure que :

$$\frac{1}{R} \in \text{Vect}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}\right). \qquad \text{D'où : } F = \text{Vect}\left(\frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}\right).$$

Montrons que la famille $\left\{\frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}\right\}$ est libre.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{aP}{Q} + \frac{b}{P} + \frac{c}{Q} = 0$$

Alors : $\frac{aP}{Q} = -\frac{b}{P} - \frac{c}{Q}$.

Si a est non nul, alors $\deg\left(\frac{aP}{Q}\right) = 0$, tandis que $\deg\left(-\frac{b}{P} - \frac{c}{Q}\right) < 0$: contradiction. Donc $a = 0$.

Il reste à observer que $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{Q}$ ne sont pas colinéaires, pour en déduire que $b = c = 0$.

Par suite, la famille $\left\{\frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}\right\}$ est une base de F.

Conclusion. $\dim F = 3$.

Exercice 4 — Algèbre linéaire

Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de E ; et I_2 la matrice identité de E.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$F = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de F.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Alors : $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & 2a \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. D'où : $a = b = c = 0$.

La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est donc libre, et génératrice de F : par suite, c'est une base de F.

Conclusion. $\dim F = 3$. Donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (puisque $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4).

2/ On pose : $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Etablir que F et G sont supplémentaires dans E.

Si I_2 appartenait à F, il existerait trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{I}_2 = aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$. Cette égalité impliquerait en particulier : $a = 2a = 1$, ce qui est absurde. Donc : $\mathrm{I}_2 \notin F$.

Conclusion. Puisque F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et que $\mathrm{I}_2 \notin F$, le cours assure que :

$$E = F \bigoplus \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2).$$

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de E.

D'après la question précédente et l'énoncé, on a :

$$E = F + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3) + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2)$$

Il s'ensuit que **B'** est génératrice de E. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on peut conclure.

Conclusion. **B'** est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base **B** à la base **B'**.

D'après le cours : $P_{\mathbf{BB'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ Donner les coordonnées de la matrice $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B**, ainsi que dans la base **B'**.

Les coordonnées de $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B** sont clairement : $(1, 0, 0, 0)$.

Pour avoir les coordonnées de cette matrice dans la base **B'**, on peut utiliser la matrice de passage (inverse à calculer) et la formule du cours, ou chercher à exprimer $\mathbf{E}_{11}$ en fonction des éléments de **B'** (ce n'est pas trop difficile).

En observant que $\mathbf{E}_{11} = 2\mathrm{I}_2 - M_1$, on peut conclure que les coordonnées de $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B'** sont : $(-1, 0, 0, 2)$.