**NOM :** **NOTE :**

# Devoir surveillé n$^0$13 — Mathématiques

*Durée approx. : $10^2$ min. Matériels électroniques et documents interdits.*

## Partie 1 (questions 1 à 14) — Séries numériques

**Question 1 — La série $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est :**

A. ☐ convergente

B. ☐ divergente

C. ☐ semi-convergente

D. ☐ grossièrement divergente

**Question 2 — La série $\sum \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ est :**

A. ☐ convergente

B. ☐ absolument convergente

C. ☐ semi-convergente

D. ☐ grossièrement divergente

**Question 3 — La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+3}$ est :**

A. ☐ absolument convergente

B. ☐ divergente

C. ☐ semi-convergente

D. ☐ grossièrement divergente

**Question 4 — Soit $\alpha$ un réel. La série $\sum n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge si et seulement si :**

A. ☐ $\alpha > 1$

B. ☐ $\alpha < 2$

C. ☐ $\alpha > 0$

D. ☐ $\alpha < 1$

**Question 5 — La série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{-2n}$ est convergente et :**

A. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\mathrm{e}}{2\,\mathrm{sh}(1)}$

B. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{sh}(1)}$

C. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{2}{\mathrm{e}\,\mathrm{sh}(1)}$

D. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{\mathrm{e}}{2\,\mathrm{sh}(1)}$

**Question 6 — La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n \times (n!)}$ est convergente et :**

A. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sqrt{\mathrm{e}}$ B. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2\mathrm{e}$ C. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\mathrm{e}}{2}$ D. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2$

**Question 7 — La série $\sum [\arctan(n+1) - \arctan(n)]$ est convergente et :**

A. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [\arctan(n+1) - \arctan(n)] = 0$

C. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [\arctan(n+1) - \arctan(n)] = \frac{\pi}{2}$

B. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [\arctan(n+1) - \arctan(n)] = \frac{\pi}{4}$

D. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [\arctan(n+1) - \arctan(n)] = -\frac{\pi}{2}$

## Les questions 8 à 10 sont liées

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

**Question 8 — La série de terme général $u_n$ est :**

A. ☐ divergente

C. ☐ absolument convergente

B. ☐ semi-convergente

D. ☐ grossièrement divergente

**Question 9 — On peut affirmer que $u_n \sim_{+\infty} v_n$ car :**

A. ☐ $\dfrac{1}{\ln(n)} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

C. ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$

B. ☐ $\dfrac{1}{\ln(n)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

D. ☐ $\sqrt{n} = o_{+\infty}(\ln(n))$

**Question 10 — Finalement, on peut conclure que :**

A. ☐ $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge

C. ☐ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent

B. ☐ $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge

D. ☐ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent

## Les questions 11 et 12 sont liées

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \ln(n^2+1) + \ln(n^2+2) + \alpha \ln(n^2+3)$$

**QUESTION 11 — La série $\sum u_n$ converge si et seulement si :**

A. ☐ $\alpha = -1$ B. ☐ $\alpha = -2$ C. ☐ $\alpha = -3$ D. ☐ $\alpha = -4$

**QUESTION 12 — Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut d'ailleurs affirmer que :**

A. ☐ $u_n \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{n^2}$ B. ☐ $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ C. ☐ $u_n \sim_{+\infty} -\dfrac{3}{n^2}$ D. ☐ $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{2}{n^2}$

## Les questions 13 et 14 sont liées

Pour tout couple d'entiers naturels $(n, N)$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

**QUESTION 13 — La série $\sum u_n$ est absolument convergente, car :**

A. ☐ $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$

B. ☐ $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n| = 0$

C. ☐ $|u_n| = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

D. ☐ $|u_n| = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

**QUESTION 14 — Soit $N$ un entier naturel. En appliquant la formule de Taylor avec reste-intégrale à la fonction sinus entre $0$ et $1$, on obtient**

$$\sin(1) = S_N + R_N \qquad \textbf{avec :}$$

A. ☐ $R_N = \dfrac{1}{N!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^N \sin^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

B. ☐ $R_N = \dfrac{1}{(2N+1)!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2N+1} \sin^{2(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

C. ☐ $R_N = \dfrac{1}{(2N+1)!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2N+1} \sin^{(2N+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

## Partie 2 (questions 15 à 30) — Applications linéaires en dim. finie

**Question 15 — Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ n'est jamais :**

A. ☐ injective B. ☐ surjective C. ☐ linéaire !

**Question 16 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère la forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ qui à une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa trace. Laquelle de ces matrices appartient au noyau de $\varphi$ ?**

A. ☐ $n\mathrm{I}_n - \mathbf{E}_{11}$ B. ☐ $n\mathrm{I}_n - n\mathbf{E}_{12} - n\mathbf{E}_{21}$ C. ☐ $2n\mathrm{I}_n - n\mathbf{E}_{11} - n\mathbf{E}_{22}$

**Question 17 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On définit un automorphisme $f$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ :**

A. ☐ $f(P) = P'$ C. ☐ $f(P) = XP$

B. ☐ $f(P) = P - nP'$ D. ☐ $f(P) = nP - XP'$

**Question 18 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On sait que $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \bigoplus A_n(\mathbb{K})$ où $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ désignent les sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ constitués des matrices symétriques et antisymétriques respectivement. On note $p$ la projection sur $A_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $S_n(\mathbb{K})$. La trace de $p$ est :**

A. ☐ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ B. ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ C. ☐ $n^2$ D. ☐ $n^2 - 1$

**Question 19 — Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $9$, et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On peut affirmer que :**

A. ☐ $f$ est une involution C. ☐ $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

B. ☐ $\mathrm{rg}(f) \geqslant 5$ D. ☐ $\mathrm{rg}(f) \leqslant 4$

## Les questions 20 à 22 sont liées

Dans les questions 20 à 22, on considère $E = M_{12}(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-ev vectoriel des matrices carrées à 12 lignes et 12 colonnes.

Pour tout entier $k$ compris entre 1 et 12, et pour toute matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in [\![1,12]\!]^2}$ de $E$, on pose :

$$f_k(A) = \sum_{j=1}^{12} a_{kj} \qquad \text{et} \qquad g_k(A) = f_k(A) - f_1(A)$$

Ainsi défini, le réel $f_k(A)$ est la somme des coefficients de la $k$-ème ligne de la matrice $A$.

On admet que $f_k$ et $g_k$ sont linéaires pour tout $k \in [\![\, 1, 12 \,]\!]$.

**QUESTION 20 — Soit $k \in [\![\, 1, 12 \,]\!]$. Le noyau de $f_k$ est :**

A. ☐ $\ker(f_k) = \{0_E\}$

B. ☐ $\ker(f_k)$ est une droite vectorielle de $E$

C. ☐ $\ker(f_k) = E$

D. ☐ $\ker(f_k)$ est un hyperplan de $E$

On définit une application linéaire $h \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}^{11})$ en posant pour toute matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in [\![1,12]\!]^2}$ de $E$ :

$$h(A) = (g_2(A), g_3(A), \ldots, g_{12}(A))$$

**QUESTION 21 — L'application $h$ :**

A. ☐ est injective

B. ☐ est de rang 1

C. ☐ est de rang 11

D. ☐ est bijective

Dans $E$, on considère le sous-espace vectoriel $F$ constitué des matrices dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales.

**QUESTION 22 — $F$ est un sev de $E$ de dimension :**

A. ☐ 133

B. ☐ 11

C. ☐ 72

D. ☐ $(\dim(E))$-1

## Les questions 23 à 26 sont liées

Dans les questions 23 à 26, on note $E = \mathbb{K}_3[X]$, et on note $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $E$.

On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans la base $B$ est :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Question 23 — L'image de $X^2$ par $f$ est :**

A. ☐ $2X^3 + X^2 + 3$ B. ☐ $X^2 + X$ C. ☐ $3X^3 + X + 2$ D. ☐ $X^3 + X^2 - X + 2$

**Question 24 — Un polynôme appartenant au noyau de $f$ est le polynôme $Q$ avec :**

A. ☐ $Q = X^2 + X + 1$ C. ☐ $Q = X^2 - X - 1$

B. ☐ $Q = X^3 - X^2 + X$ D. ☐ $Q = X^3 - X^2 - X$

**Question 25 — L'endomorphisme $f$ est de rang :**

A. ☐ 4 B. ☐ 3 C. ☐ 2 D. ☐ 1

On note $B' = \{1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3\}$ ; il est connu que $B'$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

On note $M = M_B(f)$, $M' = M_{B'}(f)$ et $P = P_{BB'}$.

**Question 26 — On a :**

A. ☐ $M'P = PM$ B. ☐ $PM' = PM$ C. ☐ $M'P = MP$ D. ☐ $PM' = MP$

## Les questions 27 à 30 sont liées

Dans les questions 27 à 30, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans $E$, on considère les trois fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ définies en posant pour tout réel $x$ :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x\,; \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right); \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ un triplet de réels. On pose : $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$.

**Question 27 — Si $\alpha_1 \neq 0$, alors :**

A. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ B. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty$ C. ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} |g(x)| = +\infty$

On note $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ le sev de $E$ engendré par les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

On peut prouver, notamment grâce à la question précédente, que la famille $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ est libre, et que c'est donc une base de $F$.

On considère l'endomorphisme de $F$, noté $\delta$, défini en posant :

$$\forall\, f \in F, \quad \delta(f) = f'$$

**Question 28 — La matrice $M_B(\delta)$ de l'endomorphisme $\delta$ dans la base $B$ est :**

A. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ B. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ C. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**Question 29 — La matrice $M_B(\delta)$ est de rang :**

A. ☐ 0 B. ☐ 1 C. ☐ 2 D. ☐ 3

**Question 30 — D'après la question précédente, on peut affirmer que :**

A. ☐ $\delta$ est un automorphisme de $F$
C. ☐ $\delta$ est injectif, mais pas surjectif
B. ☐ $\delta$ est surjectif, mais pas injectif
D. ☐ $\delta$ est un projecteur de $F$