CONCOURS BLANC JANVIER 2022

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un problème et de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 — (UNE ÉQUATION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 4) .

On rappelle qu'un nombre complexe z est donné sous **forme exponentielle** lorsqu'il est écrit $z = |z|e^{i\theta}$ (avec θ réel), et sous **forme algébrique** lorsqu'il est écrit $z = a + ib$ (avec a et b réels).

Dans cet exercice, on considère l'équation :

$$(E_1) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

- 1/ En justifiant brièvement votre réponse, donner les formes exponentielles des solutions de l'équation (E_1) .
- 2/ L'objectif de cette question est de déterminer les formes algébriques des solutions de (E_1) .

Pour tout complexe z non nul, on pose : $Z = z + \frac{1}{z}$

a/ Montrer que z est solution de (E_1) si et seulement si Z est solution d'une équation de degré 2 que l'on précisera (et que l'on notera (E_2)).

b/ Résoudre l'équation (E_2) . En déduire les solutions de (E_1) sous forme algébrique.

c/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 2 — (EDL3).

Dans cet exercice, toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, "résoudre l'équation différentielle (E) " signifiera "déterminer les solutions de (E) à valeurs réelles".

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1 , g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}, \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2x} \sin(x)$$

On note par ailleurs :

$$(H1) \quad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

- 1/ **Question préliminaire.** Déterminer les formes algébriques de $z_1 = (-2 + i)^2$ et de $z_2 = (-2 + i)^3$.
- 2/ Vérifier que g_1 , g_2 et g_3 sont solutions de $(H1)$.
- 3/ Justifier que pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

4/ A présent, on souhaite établir que réciproquement, toute solution de (H1) peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions g_1 , g_2 et g_3 .*

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, solution de (H1).

a/ On pose : $g = f'' + 4f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(H_2) \quad y' + y = 0$$

b/ Donner sans justification la solution générale de l'équation différentielle (H2).

c/ Résoudre l'équation différentielle :

$$(H_3) \quad y'' + 4y' + 5y = 0$$

d/ Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$$

e/ Conclure, en donnant la solution générale de (H1) (réponse à justifier très soigneusement).

EXERCICE 3 — (SPÉCIFIQUE MPSI - UN GROUPE D'AUTOMORPHISMES).

On note $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anneau des **entiers de Gauss**. C'est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont entières : $A = \{a + ib / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Par ailleurs, on note Γ l'ensemble des bijections φ de A dans A vérifiant les conditions :

$$(C1) : \forall (x, y) \in A^2, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$(C2) : \forall (x, y) \in A^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$(C3) : \varphi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$$

1/ Soient φ et ψ deux éléments de Γ . Etablir que $\psi \circ \varphi$ est une bijection de A dans A qui satisfait les conditions (C1) et (C3) (par la suite, on pourra admettre que $\psi \circ \varphi$ satisfait également (C2)).

2/ Soit φ un élément de Γ . Etablir que φ^{-1} est une bijection de A dans A qui satisfait les conditions (C1) et (C2) (par la suite, on pourra admettre que φ^{-1} satisfait également (C3)).

3/ Dédurre de ce qui précède que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe, en montrant que c'est un sous-groupe de $(S_{\mathbb{Z}[i]}, \circ)$.[†]

4/ Soient φ et ψ dans Γ . Montrer que : $[\varphi(i) = \psi(i)] \implies [\varphi = \psi]$.

5/ Soit $\varphi \in \Gamma$. Etablir que $\varphi(i) = i$ ou $\varphi(i) = -i$.

6/ En déduire que Γ est constitué de deux éléments, que l'on précisera.

*. Une **combinaison linéaire** des fonctions g_1 , g_2 et g_3 est précisément une fonction s'écrivant $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$, où les λ_i désignent des nombres réels.

†. On rappelle que $S_{\mathbb{Z}[i]}$ désigne le groupe des permutations de $\mathbb{Z}[i]$.

PROBLÈME 1 — (APPLICATION DU CALCUL INTÉGRAL AUX SÉRIES).
PARTIE 1 — RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et à valeurs réelles ; a et b désignent deux réels quelconques de I , avec $a < b$.

1/ Justifier brièvement que :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt \quad (1)$$

2/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t) dt \quad (2)$$

3/ Soit n un entier naturel. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \quad (3)$$

4/ Etablir par récurrence que[‡] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(b) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (4)$$

PARTIE 2 — $\sin(x)$ EST LA SOMME D'UNE SÉRIE

Dans cette partie, on note $g = \sin$.

5/ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

6/ Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $g^{(2k)}(0) = 0$ et $g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

‡. Informellement, la formule de cette question peut s'écrire :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

7/ Soient x un réel positif et n un entier naturel quelconque.

a/ Etablir que :

$$\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+2} \cos(t) dt \quad (6)$$

b/ En déduire que :

$$\left| \sin(x) - \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad (7)$$

PARTIE 3 — PYTHON — CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE $\sin(1)$

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Il résulte de la partie précédente que la suite (S_n) converge et a pour limite $\sin(1)$.

Plus précisément, S_n est une valeur approchée de $\sin(1)$ à la précision $\frac{1}{(2n+3)!}$, dans le sens où :

$$|\sin(1) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

L'objectif principal de cette partie est de coder en Python une fonction déterminant une valeur de $\sin(1)$ à une précision désirée, en utilisant l'approximation ci-dessus.

8/ La fonction `Facto(N)` ci-dessous reçoit comme paramètre un entier naturel N , et doit renvoyer la valeur de $N!$.

Compléter le code pour qu'il produise le résultat attendu (sur votre copie, on vous demande d'écrire seulement la ligne complétée).

```
def Facto(N):
    FAC = 1
    for k in range(N):
        FAC = ..... LIGNE A COMPLETER
    return FAC
```

- 9/ La fonction `Suite(N)` ci-dessous reçoit comme paramètre un entier naturel N , et doit renvoyer la valeur de S_N .

Compléter le code pour qu'il produise le résultat attendu (sur votre copie, on vous demande d'écrire seulement les lignes complétées).

```
def Suite(N):  
    Somme = ..... LIGNE A COMPLETER 1  
    for k in ..... LIGNE A COMPLETER 2  
        Somme = ..... LIGNE A COMPLETER 3  
    return Somme
```

- 10/ On a noté ci-dessous des valeurs approchées pour les 5 premiers termes de la suite (S_N) :

[1.0, 0.8333333333333334, 0.8416666666666667, 0.841468253968254, 0.8414710097001764]

Proposer un code Python (le plus court possible) permettant de générer cet affichage.

- 11/ Ecrire le code d'une fonction `Approx(p)` qui reçoit comme paramètre un entier naturel p , et renvoie une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-p} près.

Fin de l'épreuve