

CB1 — CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES — 14 JANVIER

EXERCICE 1 — (UNE ÉQUATION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 4) .

Dans cet exercice, on considère l'équation : $(E_1) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

1/ D'après le cours, les solutions de (E_1) sont les éléments de $\mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$.

Explicitement : z est solution de $(E_1) \iff z \in \{e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{-2i\pi/5}, e^{-4i\pi/5}\}$.

2/ Pour tout complexe z non nul, on pose : $Z = z + \frac{1}{z}$.

a/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Puisque z est non nul, on a :

$$[z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0] \iff \left[\frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0 \right] \iff \left[z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \right] \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, on peut observer que : $Z^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$.

On en déduit que : $Z^2 + Z = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z}$, soit encore : $Z^2 + Z = z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

Donc : $Z^2 + Z - 1 = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad (\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $[z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0] \iff [Z^2 + Z - 1 = 0]$.

L'équation (E_2) de l'énoncé est donc : $Z^2 + Z - 1 = 0$.

b/ L'équation (E_2) possède exactement deux racines réelles : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

D'après la question précédente, un complexe z est solution de (E_1) si et seulement si : $z + \frac{1}{z} = \alpha$ ou $z + \frac{1}{z} = \beta$. Résolvons ces deux équations.

► **Résolution de $z + \frac{1}{z} = \alpha$.**

On a : $z + \frac{1}{z} = \alpha \iff z^2 - \alpha z + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = \alpha^2 - 4 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{-10 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}.$$

On en déduit que les deux solutions de $z^2 - \alpha z + 1 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

► **Résolution de $z + \frac{1}{z} = \beta$.**

On a : $z + \frac{1}{z} = \beta \iff z^2 - \beta z + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = \beta^2 - 4 = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 4 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}.$$

On en déduit que les deux solutions de $z^2 - \beta z + 1 = 0$ sont :

$$z_3 = \frac{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ et } z_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Conclusion. L'équation (E₁) possède exactement quatre solutions :

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \bar{z}_1, z_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ et } \bar{z}_3.$$

c/ D'après les questions 1 et 2-b, on a : $\{e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{-2i\pi/5}, e^{-4i\pi/5}\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Observons que : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Im}(e^{2i\pi/5})$. Donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est la partie imaginaire de l'un des z_i . Puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$, on a $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$.

On en déduit que : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Im}(z_1)$ ou $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Im}(z_3)$.

Pour déterminer laquelle de ces deux assertions est vraie, on remarque que les deux parties imaginaires positives correspondent aux deux valeurs $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Or $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, puisque $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et que la fonction sin est strictement croissante entre $\pi/5$ et $2\pi/5$.

On en déduit que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est la plus grande des deux parties imaginaires positives.

Conclusion. $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$

EXERCICE 2 — (EDL3).

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1 , g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2x} \sin(x)$$

On note par ailleurs : $(H1) \quad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$

1/ **Question préliminaire.** On a : $z_1 = (-2 + i)^2 = 3 - 4i$ et $z_2 = (-2 + i)^3 = -2 + 11i$.

2/ La fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel x on a :

$$g_1'(x) = -e^{-x}; \quad g_1''(x) = e^{-x}; \quad g_1'''(x) = -e^{-x}$$

On en déduit que pour tout réel x : $g_1'''(x) + 5g_1''(x) + 9g_1'(x) + 5g_1(x) = e^{-x}(-1 + 5 - 9 + 5) = 0$.

Conclusion. La fonction g_1 est solution de (H_1) .

Les fonctions g_2 et g_3 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux). Notons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = e^{(-2+i)x}$$

On peut alors observer que : $g_2 = \operatorname{Re}(G)$ et $g_3 = \operatorname{Im}(G)$.

On en déduit que :

$$g_1''' + 5g_1'' + 9g_1' + 5g_1 = \operatorname{Re}(G''' + 5G'' + 9G' + 5G) \quad \text{et} \quad g_2''' + 5g_2'' + 9g_2' + 5g_2 = \operatorname{Im}(G''' + 5G'' + 9G' + 5G)$$

Or, pour tout réel x , on a :

$$G'''(x) + 5G''(x) + 9G'(x) + 5G(x) = [(-2 + i)^3 + 5(-2 + i)^2 + 9(-2 + i) + 5] e^{(-2+i)x}$$

$$\iff G'''(x) + 5G''(x) + 9G'(x) + 5G(x) = [-2 + 11i + 5(3 - 4i) + 9(-2 + i) + 5] e^{(-2+i)x}$$

$$\iff G'''(x) + 5G''(x) + 9G'(x) + 5G(x) = [-2 + 11i + 15 - 20i - 18 + 9i + 5] e^{(-2+i)x}$$

$$\iff G'''(x) + 5G''(x) + 9G'(x) + 5G(x) = 0$$

Par suite, pour tout réel x , on a :

$$g_2'''(x) + 5g_2''(x) + 9g_2'(x) + 5g_2(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_3'''(x) + 5g_3''(x) + 9g_3'(x) + 5g_3(x) = 0$$

Conclusion. Les fonctions g_2 et g_3 sont solutions de (H_1) .

3/ Puisque g_1 , g_2 et g_3 sont solutions de la même EDL3 $(H1)$ (qui est sans second membre), il résulte de la linéarité de la dérivation que toute combinaison linéaire de g_1 , g_2 et g_3 est solution de (H_1) .

Conclusion. Pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

4/ a/ Sous réserve que f soit une solution de $(H1)$, et en posant $g = f'' + 4f' + 5f$, on a :

$$g' + g = f''' + 4f'' + 5f' + f'' + 4f' + 5f = f''' + 5f'' + 9f' + 5f = 0$$

Conclusion. $[f \text{ solution de } (H1)] \implies [(f'' + 4f' + 5f) \text{ solution de } y' + y = 0]$.

b/ La solution générale de $y' + y = 0$ est : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ke^{-x}$ (avec K réel arbitraire).

c/ L'équation $y'' + 4y' + 5y = 0$ est une EDL2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée $X^2 + 4X + 5 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées : $-2 \pm i$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 4y' + 5y = 0$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) e^{-2x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires})$$

d/ Soit λ un réel arbitraire.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Ke^{-x}$.

La fonction f_P est solution de $(E1)$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{-x}(1 - 4 + 5) = \lambda e^{-x}$.

Par suite, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-x}$ est une solution de $(E1)$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-x} + (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) e^{-2x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires})$$

e/ Notons S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H_1) , et E l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions g_1, g_2 et g_3 .

Il résulte de la question précédente que $S \subset E$, et de la question 7 que $E \subset S$. Par suite $E = S$.

En d'autres termes, la solution générale de (H_1) est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \cos(x) + C_3 e^{-2x} \sin(x) \quad (\text{avec } C_1, C_2, C_3 \text{ réels})$$

EXERCICE 3 — (SPÉCIFIQUE MPSI - UN GROUPE D'AUTOMORPHISMES).

On note $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss. C'est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entières : $A = \{a + ib / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Par ailleurs, on note Γ l'ensemble des bijections φ de A dans A telles que :

- (C1) : $\forall (x, y) \in A^2, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- (C2) : $\forall (x, y) \in A^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
- (C3) : $\varphi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$

1/ Soient φ et ψ deux éléments de Γ . Alors $\psi \circ \varphi$ est une bijection (c'est la composée de deux bijections) de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$. En outre, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$ on a :

$$(\psi \circ \varphi)(x + y) = \psi(\varphi(x + y)) = \psi(\varphi(x) + \varphi(y)) = \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x) + (\psi \circ \varphi)(y)$$

De manière analogue : $(\psi \circ \varphi)(xy) = (\psi \circ \varphi)(x) \times (\psi \circ \varphi)(y)$

Enfin, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $(\psi \circ \varphi)(k) = \psi(\varphi(k)) = \psi(k) = k$ puisque $\varphi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ et $\psi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. D'où : $(\psi \circ \varphi)|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$.

Par conséquent : $\psi \circ \varphi \in \Gamma$ (ce qui revient à dire que $\psi \circ \varphi$ est une bijection de A dans A satisfaisant les conditions (C1), (C2) et (C3)).

Conclusion. $[(\varphi, \psi) \in \Gamma^2] \implies [\psi \circ \varphi \in \Gamma]$.

2/ Considérons un élément φ de Γ . Par définition, φ est une bijection de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$, et admet à ce titre une bijection réciproque φ^{-1} de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

Alors pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$ on a d'une part : $(\varphi \circ \varphi^{-1})(x + y) = x + y$ car $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{Z}[i]}$.

D'autre part : $x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\varphi^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))$ (puisque φ satisfait la condition (C1)).

On déduit des deux égalités précédentes que : $\varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x + y))$.

L'application φ étant bijective, elle est en particulier injective, d'où : $\varphi^{-1}(x + y) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$

Par conséquent : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}[i]^2, \varphi^{-1}(x + y) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$.

Ce qui signifie que φ^{-1} satisfait la condition (C1).

De manière analogue* : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}[i]^2, \varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(x) \times \varphi^{-1}(y)$ (φ^{-1} satisfait la condition (C2)).

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a : $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(k) = k$. Autrement dit : $\forall k \in \mathbb{Z}, \varphi^{-1}(\varphi(k)) = k$.

Or : $\forall k \in \mathbb{Z}, \varphi(k) = k$ puisque $\varphi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$.

On en déduit que : $\forall k \in \mathbb{Z}, \varphi^{-1}(k) = k$. Par suite : $\varphi^{-1}|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$.

Ce qui signifie que φ^{-1} satisfait la condition (C3).

En résumé, φ^{-1} est une bijection de A dans A , qui satisfait les conditions (C1), (C2) et (C3). C'est donc un élément de Γ .

Conclusion. $[\varphi \in \Gamma] \implies [\varphi^{-1} \in \Gamma]$.

*. Il suffit vraiment de remplacer tous les “+” par des “×” dans le raisonnement précédent.

3/ Rappelons que $S_{\mathbb{Z}[i]}$ désigne le groupe (pour la composition) des permutations de $\mathbb{Z}[i]$, càd des bijections de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

➤ Par définition de Γ , on a : $\Gamma \subset S_{\mathbb{Z}[i]}$ (SG1).

➤ L'identité de $\mathbb{Z}[i]$ est une permutation de $\mathbb{Z}[i]$ qui vérifie clairement les trois assertions caractérisant les éléments de Γ . Ainsi : $\text{id}_{\mathbb{Z}[i]} \in \Gamma$ (SG2).

➤ D'après la question 1 : $[(\varphi, \psi) \in \Gamma^2] \implies [\psi \circ \varphi \in \Gamma]$ (SG3).

➤ D'après la question 2 : $[\varphi \in \Gamma] \implies [\varphi^{-1} \in \Gamma]$ (SG4).

Conclusion. $(\Gamma, \circ)$ est un sous-groupe de $(S_{\mathbb{Z}[i]}, \circ)$. A ce titre, $(\Gamma, \circ)$ est un groupe.

4/ Soient φ et ψ dans Γ . Supposons que : $\varphi(i) = \psi(i)$.

Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Il existe deux entiers relatifs a et b tels que : $z = a + ib$. Par suite, en utilisant les successivement les trois assertions (C1), (C2) et (C3) :

$$\varphi(z) = \varphi(a + ib) = \varphi(a) + \varphi(ib) = \varphi(a) + \varphi(i)\varphi(b) = a + \varphi(i)b$$

De même : $\psi(z) = a + \psi(i)b$. Ainsi, sous l'hypothèse " $\varphi(i) = \psi(i)$ ", on a : $\varphi(z) = \psi(z)$ pour tout élément z de $\mathbb{Z}[i]$.[†]

Par conséquent : $\forall (\varphi, \psi) \in \Gamma^2, [\varphi(i) = \psi(i)] \implies [\varphi = \psi]$.

5/ Soit $\varphi \in \Gamma$. D'une part : $\varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$ puisque $\varphi|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$.

D'autre part : $\varphi(i^2) = \varphi(i \times i) = \varphi(i) \times \varphi(i) = \varphi(i)^2$.

On en déduit que : $\varphi(i)^2 = -1$. Par conséquent : $\varphi(i) = \pm i$.

Conclusion. Pour tout $\varphi \in \Gamma$, on a : $\varphi(i) = i$ ou $\varphi(i) = -i$.

6/ Soit $\varphi \in \Gamma$. D'après la question précédente, on a $\varphi(i) = \pm i$.

➤ Si $\varphi(i) = i$, il résulte des calculs de la question 4 que : $\forall z = a + ib \in \mathbb{Z}[i], \varphi(z) = a + ib = z$

Dans ce cas : $\varphi = \text{id}_{\mathbb{Z}[i]}$.

➤ Si $\varphi(i) = -i$, il résulte des calculs de la question 4 que : $\forall z = a + ib \in \mathbb{Z}[i], \varphi(z) = a - ib = \bar{z}$

Dans ce cas φ n'est autre que la conjugaison complexe dans $\mathbb{Z}[i]$, càd l'application qui à tout complexe appartenant à $\mathbb{Z}[i]$ associe son conjugué. Convenons de noter $\tau : z \in \mathbb{Z}[i] \mapsto \bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$. Il est clair que τ est une permutation de $\mathbb{Z}[i]$ satisfaisant les conditions (C1), (C2) et (C3).

On en déduit que : $\Gamma = \{\text{id}_{\mathbb{Z}[i]}, \tau\}$.[‡]

[†]. Puisque z est un élément arbitraire de $\mathbb{Z}[i]$ dans le raisonnement précédent.

[‡]. Il est rassurant d'observer que Γ est en effet un groupe, puisqu'il contient l'élément neutre, et que la conjugaison complexe τ est une involution, càd son propre inverse.

PROBLÈME 1 — (APPLICATION DU CALCUL INTÉGRAL AUX SÉRIES).**PARTIE 1 — RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES**

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et à valeurs réelles ; a et b désignent deux réels quelconques de I .

1/ On a : $\int_a^b f'(t)dt = [f(t)]_a^b$. D'où : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$.

2/ Posons pour tout réel $t \in I$: $\begin{cases} u(t) = f'(t) \\ v(t) = b - t \end{cases}$ D'où : $\begin{cases} u'(t) = f''(t) \\ v'(t) = -1 \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , ce qui rend légitime l'utilisation de la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b (b-t)f''(t)dt = [(b-t)f'(t)]_a^b + \int_a^b f'(t)dt \iff \int_a^b (b-t)f''(t)dt = -(b-a)f'(a) + f(b) - f(a).$$

Il s'ensuit que : $f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt = f(a) + (b-a)f'(a) - (b-a)f'(a) + f(b) - f(a) = f(b)$.

Conclusion. $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt$.

3/ Soit n un entier naturel. Posons pour tout réel $t \in I$: $\begin{cases} u(t) = f^{(n+1)}(t) \\ v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ D'où : $\begin{cases} u'(t) = f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) = (b-t)^n \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , ce qui rend légitime l'utilisation de la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \\ \iff \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$.

4/ Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$: " $f(b) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ ".

► **Initialisation** ($n=0$). On a : $\left[\sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^0 f^{(1)}(t)dt = f(a) + \int_a^b f'(t)dt = f(b)$.

D'où $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$f(b) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

On en déduit, avec la question 3, que :

$$f(b) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \left(\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right)$$

$$\text{D'où : } f(b) = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \quad \text{D'où } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

$$\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}, f(b) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

PARTIE 2 — $\sin(x)$ EST LA SOMME D'UNE SÉRIE

Dans cette partie, on note $g = \sin$.

5/ La propriété “ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ ” peut être démontrée par récurrence sur n (c'est une question de cours).

6/ Pour tout entier naturel k , on a : $g^{(2k)}(0) = \sin(k\pi) = 0$, et $g^{(2k+1)}(0) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi)$.

Or : $\cos(k\pi) = \operatorname{Re}(e^{ik\pi}) = \operatorname{Re}((e^{i\pi})^k) = \operatorname{Re}((-1)^k) = (-1)^k$.

$$\textbf{Conclusion. } \forall k \in \mathbb{N}, g^{(2k)}(0) = 0 \text{ et } g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

7/ a/ Soient x un réel et n un entier naturel quelconques. On applique le résultat de la question 4 à la fonction sinus, avec $a = 0$ et $b = x$, au rang $(2n+2)$, pour obtenir :

$$\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+2} \sin^{(2n+3)}(t) dt$$

Or d'après la question précédente, tous les termes de rang pair de la somme ci-dessus sont nuls. On en déduit que :

$$\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+2} \sin^{(2n+3)}(t) dt$$

D'où, toujours d'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sin(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+2} \sin^{(2n+3)}(t) dt$$

D'où finalement, en utilisant la question 5 :

$$\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+2} \cos(t) dt$$

b/ Par majoration, on déduit de la question précédente que :

$$\left| \sin(x) - \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

PARTIE 3 — PYTHON — CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE $\sin(1)$

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Il résulte de la partie précédente que la suite (S_n) converge et a pour limite $\sin(1)$.

Plus précisément, S_n est une valeur approchée de $\sin(1)$ à la précision $\frac{1}{(2n+3)!}$, dans le sens où :

$$|\sin(1) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

L'objectif principal de cette partie est de coder en Python une fonction déterminant une valeur de $\sin(1)$ à une précision désirée, en utilisant l'approximation ci-dessus.

8/ La fonction `Facto(N)` ci-dessous reçoit comme paramètre un entier naturel N , et doit renvoyer la valeur de $N!$.

Compléter le code pour qu'il produise le résultat attendu (sur votre copie, on vous demande d'écrire seulement la ligne complétée).

```
def Facto(N):
    FAC = 1
    for k in range(N):
        FAC = FAC * (k + 1)    # LIGNE A COMPLETER
    return FAC
```

9/ La fonction `Suite(N)` ci-dessous reçoit comme paramètre un entier naturel N , et doit renvoyer la valeur de S_N .

Compléter le code pour qu'il produise le résultat attendu (sur votre copie, on vous demande d'écrire seulement les lignes complétées).

```
def Suite(N):
    Somme = 0    # LIGNE A COMPLETER 1
    for k in range(N):    # LIGNE A COMPLETER 2
        Somme = Somme + ((-1)**k) / Facto(2 * k + 1)    # LIGNE A COMPLETER 3
    return Somme
```

10/ On a noté ci-dessous des valeurs approchées pour les 5 premiers termes de la suite (S_N) :

[1.0, 0.8333333333333334, 0.8416666666666667, 0.841468253968254, 0.8414710097001764]

Proposer un code Python (le plus court possible) permettant de générer cet affichage :

[Suite(N) for N in range(5)]

11/ Ecrire le code d'une fonction **Approx(p)** qui reçoit comme paramètre un entier naturel p , et renvoie une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-p} près.

```
def Approx(p):  
    m = 0  
    while Facto(2 * m + 3) < 10 ** (p):  
        m = m + 1  
    return Suite(m)
```