CONCOURS BLANC JUIN 2022

Mathématiques

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 — (Intégrales et suites).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![\, 0, 2n \,]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} \, I_m$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\, a_{n,n}}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra admettre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}\, a_{n,n}$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$$

5. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2n}{2n+1} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$$

6. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis établir que :

$$I_{2n} \sim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t$$

A l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la question précédente que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

EXERCICE 2 — (PROBABILITÉS).

Une impulsion se propage toutes les secondes entre trois positions A; B et C.
Notons A_n (*resp.* B_n, C_n) l'évènement "être en A (*resp.* en B, en C) à l'instant n", et notons encore :

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n) \text{ et } c_n = P(C_n).$$

On sait que si à la seconde n

- l'impulsion est arrivée en A, la probabilité pour qu'elle se transmette en B est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- l'impulsion est arrivée en B, la probabilité pour qu'elle se transmette en A est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- l'impulsion est arrivée en C, elle se transmet en B

à la seconde $n+1$.

Enfin, on suppose qu'initialement (à la seconde 0), l'impulsion est en A.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}\,b_n\,; \qquad b_{n+1} = \frac{3}{4}\,a_n + c_n\,; \qquad c_{n+1} = \frac{1}{4}\,a_n + \frac{1}{4}\,b_n$$

2. Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = 1 - a_n - b_n$.

3. Etablir à l'aide de la question précédente qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et un vecteur $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + B$$

<u>**Notation**</u> : *dans la suite du problème, on notera* $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. *La formule ci-dessus pourra donc être écrite*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

4. Calculer $(\mathrm{I}_2 - A)$.* Justifier que $(\mathrm{I}_2 - A)$ est inversible.

5. On pose $L = (\mathrm{I}_2 - A)^{-1} B$. Sans calculer explicitement L, établir que : $L = AL + B$

6. Calculer explicitement L, et vérifier que : $L = \begin{pmatrix} 12/35 \\ \\ 16/35 \end{pmatrix}$

7. On pose : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = X_n - L. \qquad$ Montrer que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = A^n Y_0$

---

*. On rappelle que I_2 désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

8. On pose : $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

b. On pose : $D = P^{-1}AP$. Calculer D, et vérifier que D est une matrice diagonale.

c. Etablir par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.

9. Déduire des questions précédentes l'expression de Y_n en fonction de n.

10. A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$; puis $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} c_n$.

Exercice 3 — (Algèbre linéaire).

Contexte général et notations.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ une base de E.

Enfin, on pose : $f(\mathbf{B}) = \{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_n)\}$.

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser sans justification le résultat suivant :

$$[\ f(\mathbf{B}) \text{ est une base de } F\ ] \Longrightarrow [\ f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } F\ ]$$

➤ **Première partie.**

Dans cette partie, on considère l'application $F : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ b-d & c-a \end{pmatrix}$$

On admet que F est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer les images par F des éléments de $\mathscr{B}$.

2. Etablir que la famille $F(\mathscr{B})$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

3. En déduire que F est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

➤ Deuxième partie.

Dans cette partie, on notera $\mathbf{E} = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $\mathbf{E}_n = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, avec n entier naturel quelconque.

Tout au long de cette partie, on pourra identifier un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale P qui lui est associée.

4. Soit k un entier naturel, et x un réel différent de -1.

Rappeler sans justification la formule donnant $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} x^i$ en fonction de x et de k.

5. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q_P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$Q_P(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t$$

6. Grâce à la question précédente, on définit une application :

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto Q_P \end{aligned}$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que : $\deg\left(f\left(X^k\right)\right) = k$.

b. Etablir que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $f^{-1}(Q)$.

➤ Troisième partie.

Dans cette partie, on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniminent dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

On considère l'application : $\begin{aligned} \Delta : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$

qui à toute fonction dans E associe sa dérivée. On admet que Δ est un endomorphisme de E.

7. Justifier que l'application Δ n'est pas injective, mais est surjective.

On considère à présent les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles suivantes :

$$g_1 = \exp\,; \qquad g_2 = \frac{1}{\exp}\,; \qquad g_3 = \cos \quad \text{et} \quad g_4 = \sin\,;$$

Et on pose :

$$F = \operatorname{Vect}\left(g_1, g_2, g_3, g_4\right)$$

Les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, F est un sous-espace vectoriel de E.

8. Liberté de la famille $B = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Supposons qu'il existe quatre réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ tels que † :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0_E$$

a. Etablir que la fonction $\varphi = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\lambda_1 = 0$.

b. Etablir que la famille B est une base de F.

9. Justifier que pour tout entier $i \in [\![1, 4]\!]$, $\Delta\left(g_i\right) \in F$.

10. En déduire que F est stable par Δ (c'est-à-dire établir que $\Delta\left(F\right) \subset F$).

11. D'après la question précédente, l'application :

$$\delta : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

est un endomorphisme de F. Etablir que δ est un automorphisme de F.

12. On rappelle que $\delta^2 = \delta \circ \delta$.

Etablir que δ^2 est une symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, où F_1 et F_2 sont deux sev de F que l'on précisera.

†. 0_E désigne le vecteur nul de E, c'est à dire la fonction constante égale à 0 sur $\mathbb{R}$.