

CONCOURS BLANC JUIN 2022

MATHÉMATIQUES

Corrigé

EXERCICE 1 — (INTÉGRALES ET SUITES).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on pose : $a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$

1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit m un entier naturel. On a par linéarité de l'intégrale :

$$I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} - (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} (\sqrt{1-t^2} - 1) dt$$

Or pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a $(1-t^2)^{\frac{m}{2}} \geq 0$ et $\sqrt{1-t^2} - 1 \leq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $I_{m+1} - I_m \leq 0$.

L'entier naturel m étant arbitraire dans ce raisonnement, on a établi que : $\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+1} - I_m \leq 0$.

Conclusion. La suite (I_m) est décroissante.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a : $I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$

Soit m un entier naturel. On a :

$$I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+2}{2}} dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt = \int_0^1 \underbrace{(1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}}_{u(t)} \times \underbrace{1}_{v'(t)} dt$$

On pose pour tout réel t compris entre 0 et 1 :

$$\begin{cases} u(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} \\ v(t) = t \end{cases} \implies \begin{cases} u(t) = -2 \left(\frac{m}{2} + 1 \right) t (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir :

$$I_{m+2} = \underbrace{\left[t (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} \right]_0^1}_{=0} + (m+2) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$\iff I_{m+2} = (m+2) \int_0^1 t^2 - 1 + 1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$\iff I_{m+2} = (m+2) \left(\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt - \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt \right)$$

$$\iff I_{m+2} = (m+2) (I_m - I_{m+2})$$

$$\iff (m+3)I_{m+2} = (m+2)I_m$$

Conclusion. $\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra admettre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}$

Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{2n}}{2(2n+1)\sqrt{2n}\binom{2n}{n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)((2n)!)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Notons donc $P(n)$ l'assertion :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{2n}}{2(2n+1)\sqrt{2n}\binom{2n}{n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)((2n)!)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

➤ **Initialisation** ($n = 1$).

$$\text{On a : } I_2 = \int_0^1 1-t^2 dt = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{2^2(1!)^2}{(3!)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

D'où $P(1)$ est vraie.

➤ **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel non nul n .

Alors :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)((2n+1)!)}$$

Par suite : *

$$I_{2n+2} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{((2n+3)!)}$$

D'où $P(n+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$$

La suite (I_m) est décroissante (question 1) et à valeurs strictement positives. Il s'ensuit que pour tout entier n on a :

$$I_{2n} \leq I_{2n-1} \leq I_{2n-2}$$

Puisque le réel I_{2n} est strictement positif, on peut diviser terme à terme cet encadrement pour conclure.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$

5. Dédurre de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2n}{2n+1} \leq 2\pi (a_{n,n})^2 \leq 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$$

En utilisant la question 4, on peut réécrire cet encadrement :

$$1 \leq \frac{\pi a_{n,n} 2(2n+1)a_{n,n}}{\sqrt{2n}\sqrt{2n}} \leq \frac{2(2n+1)a_{n,n}\sqrt{2n-2}}{2(2n-1)a_{n-1,n-1}\sqrt{2n}}$$

soit, après avoir fait un peu de ménage :

$$1 \leq \frac{2\pi a_{n,n}^2(2n+1)}{2n} \leq \frac{(2n+1)a_{n,n}\sqrt{n-1}}{(2n-1)a_{n-1,n-1}\sqrt{n}} \quad (\spadesuit)$$

L'inégalité de gauche donne directement la première moitié de la réponse à la question :

*. En multipliant par $\frac{2n+2}{2n+2}$.

$$\frac{2n}{2n+1} \leq 2\pi (a_{n,n})^2 \quad (\clubsuit)$$

Pour celle de droite, il faut travailler un petit peu plus :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi a_{n,n}^2(2n+1)}{2n} &\leq \frac{(2n+1)a_{n,n}\sqrt{n-1}}{(2n-1)a_{n-1,n-1}\sqrt{n}} \\ \iff 2\pi a_{n,n}^2 &\leq \frac{2n(2n+1)a_{n,n}\sqrt{n-1}}{(2n+1)(2n-1)a_{n-1,n-1}\sqrt{n}} \\ \iff 2\pi a_{n,n}^2 &\leq \frac{2n(2n+1)\sqrt{n-1}\sqrt{2n}(2n)!2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n+1)(2n-1)\sqrt{2n-2}\sqrt{n}2^{2n+1}(n!)^2(2n-2)!} \\ \iff 2\pi a_{n,n}^2 &\leq \frac{2n(2n)!2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)2^{2n+1}(n!)^2(2n-2)!} \\ \iff 2\pi a_{n,n}^2 &\leq \frac{2n(2n)(2n-1)2^{2n-1}}{(2n-1)2^{2n+1}n^2} \\ \iff 2\pi a_{n,n}^2 &\leq \frac{n^2 2^{2n+1}}{2^{2n+1}n^2} \iff 2\pi a_{n,n}^2 \leq 1 \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

Conclusion. D'après $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n}{2n+1} \leq 2\pi (a_{n,n})^2 \leq 1$

6. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis établir que :

$$I_{2n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'encadrement de la question précédente, tous les termes sont des réels positifs, et $a_{n,n}$ lui-même est positif. La croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction racine carrée permet donc d'écrire :

$$\sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \leq \sqrt{2\pi} a_{n,n} \leq 1$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \leq a_{n,n} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Puisque $\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$ a pour limite 1 lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de cet encadrement et du théorème des gendarmes que la suite $(a_{n,n})$ est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{I_{2n}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}} = \frac{2I_{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}2(2n+1)a_{n,n}} = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2n+1)a_{n,n}} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}(n+1/2)a_{n,n}}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{I_{2n}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}} = \frac{n}{n+1/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_{n,n}}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1/2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_{n,n}} = 1 \text{ (d'après (\spadesuit))}.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}} = 1 \quad \text{soit :} \quad I_{2n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Conclusion. La suite $(a_{n,n})$ est convergente et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

En outre : $I_{2n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

A l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la question précédente que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'intégrale J_n , on pose : $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$. D'après la formule du changement de variable, on en déduit que :

$$J_n = \int_0^1 (1 - u^2)^n \sqrt{n} du = \sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du = \sqrt{n} I_{2n}$$

D'après la question précédente :

$$J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Conclusion. La suite (J_n) converge et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

EXERCICE 2 — (PROBABILITÉS).

Une impulsion se propage toutes les secondes entre trois positions A ; B et C .

Notons A_n (resp. B_n , C_n) l'évènement "être en A (resp. en B , en C) à l'instant n ", et notons encore :

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n) \text{ et } c_n = P(C_n).$$

On sait que si à la seconde n

- ⇒ l'impulsion est arrivée en A , la probabilité pour qu'elle se transmette en B est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- ⇒ l'impulsion est arrivée en B , la probabilité pour qu'elle se transmette en A est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- ⇒ l'impulsion est arrivée en C , elle se transmet en B

à la seconde $n + 1$.

Enfin, on suppose qu'initialement (à la seconde 0), l'impulsion est en A .

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n; \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n; \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n$$

A chaque seconde n , les évènements A_n , B_n et C_n constituent un système complet d'évènements. Selon la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$p(A_{n+1}) = \underbrace{p_{A_n}(A_{n+1})}_{=0 \text{ (énoncé)}} \times p(A_n) + \underbrace{p_{B_n}(A_{n+1})}_{=3/4 \text{ (énoncé)}} \times p(B_n) + \underbrace{p_{C_n}(A_{n+1})}_{=0 \text{ (énoncé)}} \times p(C_n)$$

D'où : $a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$.

Justifications analogues pour les deux autres formules.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n; \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n; \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n$

2. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = 1 - a_n - b_n$.

A chaque seconde n , les évènements A_n , B_n et C_n constituent un système complet d'évènements. Il s'ensuit que $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, soit $a_n + b_n + c_n = 1$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = 1 - a_n - b_n$

3. Etablir à l'aide de la question précédente qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + B$$

D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n - b_n + 1 \end{cases}.$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B}$

Notation : dans la suite du problème, on notera $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. La formule ci-dessus pourra donc être écrite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

4. Calculer $(I_2 - A)$.[†] Justifier que $(I_2 - A)$ est inversible.

D'après la question précédente : $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix}$.

Son déterminant vaut $35/16$; puisqu'il est non nul, $(I_2 - A)$ est inversible.

5. On pose $L = (I_2 - A)^{-1} B$. Sans calculer explicitement L , établir que : $L = AL + B$

En multipliant par $I_2 - A$ les deux termes de l'égalité de l'énoncé, on obtient : $(I_2 - A)L = B$, puis en développant le premier terme : $I_2 L - AL = B$.

6. Calculer explicitement L , et vérifier que : $L = \begin{pmatrix} 12/35 \\ 16/35 \end{pmatrix}$

On a : $(I_2 - A)^{-1} = \frac{16}{35} \begin{pmatrix} 2 & 3/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$, d'où : $L = \frac{16}{35} \begin{pmatrix} 2 & 3/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{16}{35} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conclusion. $L = \begin{pmatrix} 12/35 \\ 16/35 \end{pmatrix}$

7. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = X_n - L$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$

Soit n un entier naturel. Par définition, on a : $Y_{n+1} = X_{n+1} - L$ et en utilisant les relations questions précédentes, on obtient :

$$Y_{n+1} = AX_n + B - (AL + B) \text{ soit : } Y_{n+1} = AX_n - AL = A(X_n - L).$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = A^n Y_0$

[†]. On rappelle que I_2 désigne la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

8. On pose : $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1} .

On a $\det(P) = 2$, donc P est inversible. En outre : $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Conclusion. $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. On pose : $D = P^{-1}AP$. Calculer D , et vérifier que D est une matrice diagonale.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix}$

c. Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété “ $A^n = PD^nP^{-1}$ ”. L’initialisation (pour $n = 0$) est immédiate puisque $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Reste à établir l’hérédité.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n . Alors $A^{n+1} = A^n \times A$, et en utilisant la définition de D (à savoir $D = P^{-1}AP$), on peut écrire : $A = PDP^{-1}$. De plus, d’après l’hypothèse de récurrence : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Par suite : $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, et cette dernière écriture permet d’affirmer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l’hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$

9. Dédurre des questions précédentes l’expression de Y_n en fonction de n .

D’après les questions précédentes, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = A^n Y_0$. En outre, puisque d’après l’énoncé l’impulsion est en A à la seconde 0, on a : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, soit : $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après calculs : $Y_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$

10. A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; puis $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

D'après la question précédente :

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{16}{35} + -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

On observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] = 0$.

Il s'ensuit que : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{12}{35}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{16}{35}$.

En passant alors à la limite dans la relation $c_n = 1 - a_n - b_n$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$.