

CONCOURS BLANC N°1 — MATHÉMATIQUES — 19 JANVIER 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures.

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le sujet est rédigé sur 6 pages, et comporte un exercice et deux problèmes.

Barème : Ex : 6pts — Pb1 : 18pts (6+12) — Pb2 : 24pts (8+5+5+6) — Total : 48pts

PROBLÈME 1 - Etude de deux séries convergentes

Cet exercice a pour but de déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme alternée des inverses des entiers naturels, et celle de la somme des inverses des carrés des entiers naturels :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Partie n°1 — Série harmonique alternée

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.

3. Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$2I_n = (-1)^n (\ln(2) - v_n) \quad \text{où l'on a noté : } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Indication : pour l'initialisation, il pourra être utile d'observer que $x^3 = x(1+x^2) - x$.

4. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) = \ln(2)$.

Partie n°2 — Valeur exacte de $\zeta(2)$

5. Préliminaires

a. Justifier que pour tout entier naturel k , on a : $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi t \cos(kt) \, dt = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

c. On **admet** que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi t^2 \cos(kt) \, dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$.

Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) \, dt = \frac{1}{k^2}$

6. Soit $t \in]0, \pi]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

7. Un lemme de Riemann et Lebesgue

a. Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^\pi \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \leq \frac{|\psi(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \times M \right)$$

où l'on a posé : $M = \max_{[0, \pi]} |\psi'(t)|$.

b. Déduire de la question précédente que pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^\pi \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right] = 0$$

8. On définit une fonction g sur $[0, \pi]$ en posant :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad g(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On **admet** que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$.

b. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de : $\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)$

*. La fonction ψ' est continue sur $[0, \pi]$, puisque l'on a supposé ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Or nous verrons cette année, et nous admettons provisoirement dans ce sujet, qu'une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné est elle-même bornée et atteint ses bornes, ce qui assure l'existence de M .

Problème 2 — Suites récurrentes et méthodes algébriques

(commun aux MPSI et PCSI)

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques suites définies par récurrence.

Partie n°1 — Calculs algébriques

On pose : $A = 1 + \sqrt{2}$.

1. a. Démontrer (par exemple par récurrence) que pour tout entier naturel n , il existe un couple (p_n, q_n) d'entiers naturels tels que :

$$A^n = p_n + q_n\sqrt{2}.$$

- b. Montrer que le couple (p_n, q_n) est unique (on pourra utiliser sans le justifier le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
2. Préciser les valeurs de p_0, q_0, p_1 et q_1 .
3. Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + 2q_n \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \end{cases}$$

4. Dédurre de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n \quad \text{et} \quad q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$$

5. En déduire les expressions de p_n et q_n en fonction de n .

Partie n°2 — Calculs effectifs en Python

Rappels et notations. Pour un nombre réel x , il existe un plus grand entier inférieur ou égal à x , appelé *partie entière* ou *plancher* de x . Ce nombre est noté $\lfloor x \rfloor$. Il existe par ailleurs un plus petit entier supérieur ou égal à x , appelé *plafond* de x . Le plafond de x est égal à x si x est entier, égal à $\lfloor x \rfloor + 1$ sinon. Les fonctions `ceil` et `floor` du module `math` de Python renvoient respectivement le plafond et le plancher d'un nombre flottant x . Ainsi `ceil(1.24)` vaut 2, et `floor(1.24)` vaut 1.

Le but de cette partie est de comparer quelques algorithmes de calcul du terme général de la suite (L_n) définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = A^n + B^n \quad \text{avec } A = 1 + \sqrt{2} \text{ et } B = 1 - \sqrt{2}$$

On indique que des valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut de A et B sont $A \approx 2,4142$ et $B \approx -0,4142$.

6. On propose la fonction suivante pour calculer le terme L_n . On rappelle que `**` est l'opérateur Python d'élévation à la puissance, et `sqrt` la fonction racine carrée.

```

1  def calcul1(n):
2      A = 1 + sqrt(2)
3      B = 1 - sqrt(2)
4
5      if n == 0:
6          return 2
7
8      else:
9          return A**n + B**n

```

L'évaluation de `[calcul1(n) for n in range(5)]` renvoie la liste

`[2, 1.9999999999999998, 6.0, 13.999999999999998, 33.999999999999999]`

Pourquoi ne s'agit-il pas d'une liste d'entiers ?

7. On propose maintenant la fonction suivante pour calculer L_n .

```

1  def calcul2(n):
2      A = 1 + sqrt(2)
3
4      if n == 0:
5          return 2
6
7      else:
8          if n % 2 == 0:
9              return ceil(A**n)
10             else:
11                 return floor(A**n)

```

L'évaluation de `[calcul2(n) for n in range(5)]` renvoie la liste

`[2, 2, 6, 14, 34]`

Expliquer les choix faits dans les lignes 8 à 11, et démontrer que si les calculs en flottants sont exacts, l'instruction `calcul2(n)` renvoie effectivement le terme L_n .

8. Un calcul exact montre que $L_{35} = 24954506565518$, mais `calcul2(35)` renvoie 24954506565517. Proposer une explication à cette différence.
9. On souhaite à présent écrire une fonction déterminant L_n , qui évite tout problème lié au calcul avec des flottants. A cette fin, on ne va travailler qu'avec des entiers, sur lesquels Python calcule de manière exacte.

Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de la fonction ci-dessous, de telle sorte que l'instruction `calcul3(n)` renvoie le terme L_n .

```

1  def calcul3(n):
2      if (n == 0) or (n == 1):
3          return 2
4
5      else:
6          a, b = 2, 2
7          for i in range(n):
8              a, b = # A COMPLETER
9              return # A COMPLETER

```

Partie n°3 — “Suites récurrentes affines” d’ordre 2

Dans cette partie, a et b désignent deux réels, et (v_n) une suite réelle fixée.

On note $\mathbf{E}$ l’ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$$

et on note $\mathbf{H}$ l’ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

10. On suppose qu’il existe une suite réelle (t_n) dans $\mathbf{E}$.

Soit (u_n) une suite réelle. Etablir que : $[(u_n) \in \mathbf{E}] \iff [(u_n - t_n) \in \mathbf{H}]$

11. Dans cette question, on suppose que la suite (v_n) est géométrique et non nulle, et qu’il existe donc un réel $q \neq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$.

On suppose en outre que q n’est pas solution de l’équation $X^2 + aX + b = 0$.

Etablir qu’il existe un réel λ , que l’on exprimera en fonction de v_0 , a et b , tel que la suite de terme général $u_n = \lambda \times q^n$ appartienne à $\mathbf{E}$.

12. **Application.** Déterminer l’ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n = (-1)^n$$

Partie n°4 — Etude d’une suite récurrente linéaire d’ordre 3

Dans cette dernière partie, on note $\mathbf{F}$ l’ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n$$

13. Soit (u_n) une suite de $\mathbf{F}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n$.

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} + v_n = 0$. En déduire l’expression de v_n en fonction de n et v_0 .

14. Soit (u_n) une suite réelle. Etablir l’implication :

$$[(u_n) \in \mathbf{F}] \implies [\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, u_n = \alpha \times (-1)^n + \beta \times A^n + \gamma \times B^n]$$

$$(avec A = 1 + \sqrt{2} \text{ et } B = 1 - \sqrt{2})$$

15. Conclure, en déterminant l’ensemble des suites réelles de l’ensemble $\mathbf{F}$.

EXERCICE — Distance dans l'anneau des matrices carrées

Soit p un entier naturel non nul.

Pour tout couple de matrices (A, B) de $M_p(\mathbb{R})^2$, on définit la **distance** entre A et B et on note $d(A, B)$ le réel positif :

$$d(A, B) = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} |b_{ij} - a_{ij}|$$

1. (**Inégalité triangulaire**). Etablir que : $\forall (A, B, C) \in M_p(\mathbb{R})^3$, $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.
2. On note S l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbb{R})$ situées à une distance inférieure ou égale à 1 de la matrice identité, c'est à dire :

$$S = \{A \in M_p(\mathbb{R}) \mid d(A, I_p) \leq 1\}$$

- a. Justifier que S est une partie de $M_p(\mathbb{R})$ qui contient la matrice $0_{M_p(\mathbb{R})}$.
- b. $(S, +)$ est-il un sous-groupe de $(M_p(\mathbb{R}), +)$?
3. On note $M_p(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients rationnels.

Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$.

Etablir qu'il existe une suite de matrices $(B_n)_n$ de $M_p(\mathbb{Q})$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N_0] \implies [d(A, B_n) < \varepsilon]$$