Corrigé du CB1 — Mathématiques — 19 janvier 2019

Problème 1 - Etude de deux séries convergentes

Partie n^{0}1 — Série harmonique alternée

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \in [0,1]$ on a : $0 \leqslant \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2} \leqslant x^{2n+1}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

Or : $\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2}}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$, on déduit de ce qui précède et du théorème d'encadrement que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

2/ Soit n un entier naturel.

On a : $$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}+x^{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n+1}\frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}}$

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ l'assertion : $2I_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

➤ Initialisation. Pour $n = 1$, on a : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Or : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).$

Il s'ensuit que $I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$. Par suite : $2I_1 = 1 - \ln(2)$.

D'un autre côté : $(-1)^1 \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = -\left(\ln(2) - 1\right) = 1 - \ln(2).$

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

➤ Hérédité. Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un certain n dans $\mathbb{N}^*$. Commençons par observer que d'aaprès la question précédente, on a : $2I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - 2I_n$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$2I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$
$$= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right)\right)$$

Finalement : $2I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$. Ce qui assure que la propriété $P(n+1)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 2I_n = (-1)^n\left(\ln(2) - v_n\right) \qquad \text{où l'on a noté : } v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

4/ D'après la question 1 et la question 3, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\left(\ln(2)-v_n\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln(2)-v_n\right) = 0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)}\,^{*}.$$

Partie n^{0}2 — Valeur exacte de $\zeta(2)$

5/ a/ $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ \cos(k\pi)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}}{2} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^k + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right)^k}{2}\boxed{= (-1)^k}$.

b/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k}\end{cases}$ d'où : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos(kt)\end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\left[\cos(kt)\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}}$$

c/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I_k = \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ I_k = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}}.$$

6/ Soient $t \in\ ]0;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\exp^{\mathrm{i}kt}}_{S}\right)$, et calculons S.

$$S = \sum_{k=1}^{n}\exp^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\exp^{\mathrm{i}t}\right)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \text{ (puisque } \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1).$$

$*$. “Avec des petits points” : $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

Puis on applique la technique de l'angle moitié :

$$S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}\,t}\,\frac{-2\mathrm{i}\sin(nt/2)}{-2\mathrm{i}\sin(t/2)} \quad \text{d'où : } \boxed{S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}\,t}\,\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}}$$

On en déduit, en identifiant les parties réelles de l'égalité précédente que :

$$\boxed{\forall\, t \in\ ]\,0;\pi]\,,\ \forall\, n \in\ \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\,\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}}.$$

7/ a/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(t) = \psi(t) \\ v(t) = -\dfrac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u'(t) = \psi'(t) \\ v'(t) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+\frac{1}{2}}\,\psi(t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

En observant que $\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$, on déduit de ce qui précède :

$$\boxed{\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\psi(0)}{n+\frac{1}{2}}}_{=A} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\psi'(t)\,\mathrm{d}t}_{=B}}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\left|\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant |A| + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,|B|$.

➤ Il est clair que : $\displaystyle |A| = \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}}$

➤ Par ailleurs : $\displaystyle |B| \leqslant \int_0^{\pi}\underbrace{\left|\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}_{\leqslant 1}\times\underbrace{|\psi'(t)|}_{\leqslant M}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi}M\,\mathrm{d}t = M\pi$

On déduit de ces inégalités que :

$$\boxed{\text{Pour toute fonction } \psi \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi] : \forall\, n \in\ \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}}}$$

b/ D'après la question précédente, si ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^\pi \psi\,(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\psi(0)|}{n+\dfrac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\dfrac{1}{2}}$$

Comme : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|\psi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\int_0^\pi \psi\,(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi \psi\,(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0}$$

8/ a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 5-c/, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ \mathrm{d}t.$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\ \mathrm{d}t$

D'après la question 6/, on a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t \qquad (\spadesuit)$

Or, pour tout $t \in\ ]\,0;\pi]$, on a :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{nt}{2}+\dfrac{n+1}{2}\,t\right)+\sin\left(\dfrac{nt}{2}-\dfrac{n+1}{2}\,t\right)}{2} = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\,t\right)+\sin\left(-\dfrac{t}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\,t\right)-\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2} \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t$

D'où finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} - t\,\mathrm{d}t \qquad (❀)$

Il reste à observer que : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} - t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}\left[t^3\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{3}$

On en déduit, avec (❀), que : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g\,(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t}$

b/ La fonction g étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ d'après l'énoncé, on a : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi g\,(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue (question 7-b).

On en déduit, avec la question précédente, que : $\boxed{\displaystyle\zeta(2) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}}$

Problème 2 — Suites récurrentes et méthodes algébriques

Partie n^{0}1 — Calculs algébriques

On pose : $A = 1 + \sqrt{2}$.

1/ Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $\exists\,(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2,\ A^n = p_n + q_n\sqrt{2}$.

Puisque $A^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$, le couple d'entiers naturels $(p_0, q_0) = (1, 0)$ convient, et permet d'établir que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n fixé. Alors :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(p_n + q_n\sqrt{2}\right) = (p_n + 2q_n) + (p_n + q_n)\sqrt{2}$$

En posant $p_{n+1} = p_n + 2q_n$, et $q_{n+1} = p_n + q_n$, on obtient deux entiers naturels (car p_n et q_n sont dans $\mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence) tels que : $A^{n+1} = p_{n+1} + q_{n+1}\sqrt{2}$. D'où $P(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité de l'assertion.

On peut donc affirmer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\,(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2,\ A^n = p_n + q_n\sqrt{2}$.

Reste à établir l'unicité du couple (p_n, q_n). Supposons donc que, pour un entier n fixé, il existe deux couples d'entiers naturels (p_n, q_n) et (r_n, s_n) tels que $A^n = p_n + q_n\sqrt{2} = r_n + s_n\sqrt{2}$. Alors : $p_n - r_n = (s_n - q_n)\sqrt{2}$.
Raisonnons par l'absurde que $s_n \neq q_n$. Alors $\sqrt{2} = \dfrac{p_n - r_n}{s_n - q_n}$, ce qui impliquerait que $\sqrt{2}$ est rationnel ; contradiction. On en déduit que $s_n = q_n$, d'où $p_n - r_n = 0$, d'où $p_n = r_n$.

Ce qui établit l'unicité du couple (p_n, q_n). $\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\,(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2,\ A^n = p_n + q_n\sqrt{2}}$.

2/ On a déjà observé que $A^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$, d'où $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$. Par ailleurs : $A^1 = 1 + \sqrt{2}$ d'où $p_1 = 1$ et $q_1 = 1$. $\boxed{\textbf{Conclusion.}\ p_0 = 1\,;\ p_1 = 1\,;\ q_0 = 0 \text{ et } q_1 = 1.}$

3/ D'après les calculs faits pour établir l'hérédité de $P(n)$ dans la question 1, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & p_n + 2q_n \\ q_{n+1} & = & p_n + q_n \end{array}\right.}$$

4/ Soit n un entier naturel arbitraire. On a d'après la question précédente :

$$p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2\,(p_n + q_n) = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n = p_{n+1} + p_n + \underbrace{(p_n + 2q_n)}_{=p_{n+1}} = 2p_{n+1} + p_n$$

$$\text{Et : } q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 2q_n + q_{n+1} = \underbrace{(p_n + q_n)}_{=q_{n+1}} + q_n + q_{n+1} = 2q_{n+1} + q_n$$

$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \forall n \in \mathbb{N},\ (p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n) \wedge (q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n)}$

5/ Soit $(u_n)_n$ une suite réelle satisfaisant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$. Alors (u_n) est une SRL2. Pour déterminer l'expression de son terme général, on commence par résoudre l'équation (caractéristique) : $x^2 - 2x - 1 = 0$. Celle-ci possède deux racines réelles distinctes : $1 \pm \sqrt{2}$.

Ainsi, d'après le cours : $\boxed{\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \mu\left(1 - \sqrt{2}\right)^n}$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \lambda \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Puisque d'après la question 2 on a $p_0 = 1$ et $p_1 = 1$, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+\mu = 1 \\ \\ \lambda+\mu+(\lambda-\mu)\sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \qquad \text{soit :} \quad \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

Par suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]}$

De manière analogue, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \lambda \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Puisque d'après la question 2 on a $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+\mu = 0 \\ \\ \lambda+\mu+(\lambda-\mu)\sqrt{2} = 1 \end{array}\right. \qquad \text{soit :} \quad \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \mu = -\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Par suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]}$

Partie n^{0}2 — Calculs effectifs en Python

6/ Les calculs effectués pour le calcul de L_n le sont avec des flottants, et donc en particulier avec des valeurs approchées pour $\sqrt{2}$ (et donc pour A et B). Ce qui explique que les valeurs obtenues ne soient en général pas entières.

7/ Par définition, on a $L_n = A^n + B^n$ pour tout entier naturel n.

Lorsque n est pair (et non nul), on a : $0 < B^n < 1$. Il s'ensuit que : $L_n = A^n + B^n$ est le plus petit entier supérieur à A^n, càd : $L_n = \lfloor A^n \rfloor + 1$.

Lorsque n est impair, on a : $-1 < B^n < 0$. Il s'ensuit que : $L_n = A^n + B^n$ est le plus grand entier inférieur à A^n, càd : $L_n = \lfloor A^n \rfloor$.

Dans tous les cas, si les calculs en flottants sont exacts, l'instruction `calcul2(n)` renvoie effectivement le terme L_n.

8/ Mais précisément, les calculs effectués en flottants ne sont pas exacts. Lorsque le programme détermine la valeur de L_{35}, il commence par calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)^{35}$. Or, ce calcul étant réalisé avec une valeur approchée de $\sqrt{2}$, l'erreur initiale commise devient plus importante avec l'élévation à la puissance 35, ce qui explique que la partie entière du nombre $(1+\sqrt{2})^{35}$ calculée par l'ordinateur soit différente de la valeur exacte de L_{35}.

9/ On souhaite à présent écrire une fonction déterminant L_n, qui évite tout problème lié au calcul avec des flottants. A cette fin, on ne va travailler qu'avec des entiers, sur lesquels Python calcule de manière exacte. La fonction ci-dessous renvoie justement le terme L_n.

```
def calcul3(n):
    if (n ==0) or (n ==1):
        return 2

    else:
        a,b =2,2
        for i in range(n):
            a,b =a+2b,a+b
        return a
```

Partie n^{0}3 — "Suites récurrentes affines" d'ordre 2

Dans cette partie, a et b désignent deux réels, et (v_n) une suite réelle fixée.

On note $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$$

et on note $\boldsymbol{H}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

10/ On suppose qu'il existe une suite réelle (t_n) dans $\mathbf{E}$. Soit (u_n) une suite réelle.
On a : $[(u_n) \in \mathbf{E}]$

$\iff [\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n]$

$\iff [\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n]$

$\iff [\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - t_{n+2} + a\,(u_{n+1} - t_{n+1}) + b\,(u_n - t_n) = 0]$

$\iff [(u_n - t_n) \in \mathbf{H}]$

Conclusion. $[(u_n) \in \mathbf{E}] \iff [(u_n - t_n) \in \mathbf{H}]$

11/ Supposons que pour tout entier naturel n, on ait $v_n = v_0 q^n$ et $u_n = \lambda q_n$. Alors :

$[(u_n) \in \mathbf{E}]$

$\iff [\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda q^{n+2} + a\lambda q^{n+1} + b\lambda q^n = v_0 q^n]$

$\iff [\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda q^2 + a\lambda q + b\lambda)\, q^n = v_0 q^n]$

$\iff [\lambda\,(q^2 + aq + b) = v_0]$ (car $q \neq 0$ par hypothèse)

$\iff \left[\lambda = \dfrac{v_0}{q^2 + aq + b}\right]$ (légitime puisque $q^2 + aq + b \neq 0$ par hypothèse)

Conclusion. La suite de terme général $u_n = \dfrac{v_0}{q^2 + aq + b}\, q^n$ est telle que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_0 q^n$, lorsque le réel q n'est pas racine de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.

12/ **Application**. D'après les questions précédentes, une suite (u_n) est solution du problème si et seulement si pour tout n entier naturel on a : $u_n = t_n + v_n$, avec (t_n) une solution particulière de "l'équation complète", et (v_n) la solution générale de "l'équation homogène associée".

Commençons par rechercher une suite (t_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} - 2t_{n+1} - t_n = (-1)^n$, en exploitant le résultat de la question 11.

Dans cette situation, le réel $q=-1$ n'est pas racine de l'équation $x^2-2x-1=0$ (voir partie 1). Il suffit alors d'utiliser le calcul fait dans la question précédente, pour obtenir :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ t_n=\frac{1}{(-1)^2-2(-1)-1}(-1)^n=\frac{1}{2}(-1)^n.$$

D'autre part, l'ensemble des suites (v_n) telles que $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad v_{n+2}-2v_{n+1}-v_n=(-1)^n$ est l'ensemble des suites dont le terme général s'écrit $v_n=\lambda\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ (en vertu de la question 5).

Conclusion. L'ensemble des suites réelles (u_n) tque : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n=(-1)^n$ est l'ensemble des suites (u_n) telles que :

$$\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{2}(-1)^n+\lambda\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

Partie n^{0}4 — Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Dans cette dernière partie, on note $\boldsymbol{F}$ *l'ensemble des suites réelles* (u_n) *telles que :*

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+3}=u_{n+2}+3u_{n+1}+u_n$$

13/ Soit (u_n) une suite de $\mathbf{F}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n$.
Alors pour tout entier n : $v_{n+1}+v_n=u_{n+3}-2u_{n+2}-u_{n+1}+u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n=\underbrace{u_{n+3}-u_{n+2}-3u_{n+1}-u_n}_{=0\text{ car }(u_n)\in\mathbf{F}}$

On en déduit que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}+v_n=0$. Il revient au même d'écrire : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=-v_n$. Il s'ensuit que la suite (v_n) est géométrique de raison (-1), d'où : $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n=(-1)^n v_0}$.

14/ Soit (u_n) une suite réelle. D'après la question précédente, si $(u_n)\in\mathbf{F}$, alors : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n=(-1)^n v_0$. En vertu de la question 12 de la partie 3, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{v_0}{2}(-1)^n+\lambda\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

En posant $\alpha=\dfrac{v_0}{2}$, on peut écrire : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha(-1)^n+\lambda\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\mu\left(1-\sqrt{2}\right)^n$.

Conclusion. $[(u_n)\in\mathbf{F}]\Longrightarrow[\exists\,(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha\times(-1)^n+\beta\times A^n+\gamma\times B^n]$

15/ L'implication précédente traduit une inclusion : celle de l'ensemble $\mathbf{F}$ dans l'ensemble $\mathbf{G}$ des suites dont le terme général s'écrit $\alpha\times(-1)^n+\beta\times A^n+\gamma\times B^n$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit (u_n) une suite appartenant à l'ensemble $\mathbf{G}$. Alors il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha\times(-1)^n+\beta\times A^n+\gamma\times B^n$.

On a alors, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
&u_{n+3}-u_{n+2}-3u_{n+1}-u_n\\
&=\alpha\times(-1)^{n+3}+\beta\times A^{n+3}+\gamma\times B^{n+3}-\alpha\times(-1)^{n+2}-\beta\times A^{n+2}-\gamma\times B^{n+2}-3\alpha\times(-1)^{n+1}-3\beta\times A^{n+1}\\
&\qquad-3\gamma\times B^{n+1}-\alpha\times(-1)^n-\beta\times A^n-\gamma\times B^n\\
&=\alpha(-1)^n\underbrace{\left[(-1)^3-(-1)^2-3(-1)-1\right]}_{=0}+\beta A^n\left[A^3-A^2-3A-1\right]+\gamma B^n\left[B^3-B^2-3B-1\right]
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$A^3-A^2-3A-1=(1+\sqrt{2})^3-(1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})-1=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}-2-3-3\sqrt{2}-1=0$$

Et :

$$B^3-B^2-3B-1=(1-\sqrt{2})^3-(1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})-1=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}-2-3+3\sqrt{2}-1=0$$

On en déduit donc que : $u_{n+3}-u_{n+2}-3u_{n+1}-u_n=0$.

En résumé, on a établi que si (u_n) appartient à $\mathbf{G}$, alors elle appartient à $\mathbf{F}$. Ce qui établit l'inclusion : $\mathbf{G}\subset\mathbf{F}$.

D'après ce résultat, celui de la question précédente, et la règle de double inclusion, on peut conclure que les ensembles $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont égaux.

Conclusion. Soit (u_n) une suite réelle. On a

$$[(u_n)\in\mathbf{F}]\Longleftrightarrow\left[\exists\,(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha\times(-1)^n+\beta\times(1+\sqrt{2})^n+\gamma\times(1-\sqrt{2})^n\right]$$

Exercice 1 - Distance dans l'anneau des matrices carrées

1/ **(Inégalité triangulaire)**. Soient A, B et C trois matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout couple d'entiers $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, on a :† $|c_{ij}-a_{ij}|\leqslant|c_{ij}-b_{ij}|+|b_{ij}-a_{ij}|$

En particulier : $\max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}|c_{ij}-a_{ij}|\leqslant\max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}|c_{ij}-b_{ij}|+\max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}|b_{ij}-a_{ij}|$

Conclusion : $\forall\,(A,B,C)\in\mathrm{M}_p(\mathbb{R})^3,\ \mathrm{d}(A,C)\leqslant\mathrm{d}(A,B)+\mathrm{d}(B,C)$

2/ a/ On note S l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ situées à une distance inférieure ou égale à 1 de la matrice identité, c'est à dire :

$$S=\{A\in\mathrm{M}_p(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{d}(A,\mathrm{I}_p)\leqslant 1\}$$

S est donc une partie de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ par définition, qui contient la matrice $0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$, puisque : $\mathrm{d}\left(\mathrm{I}_p,0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}\right)=1$ (et donc $\leqslant 1$).

b/ Les matrices I_p et $2\mathrm{I}_p$ appartiennent à S, mais leur somme n'appartient pas à S (puisque $\mathrm{d}(3\mathrm{I}_p,\mathrm{I}_p)=2$. Donc la loi "+" n'est pas une LCI dans S. Ainsi : $(S,+)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathrm{M}_p(\mathbb{R}),+)$.

3/ Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout coefficient de la matrice A est limite d'une suite de rationnels. Pour tout couple $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, il existe donc une suite de rationnels que l'on note $(b_{ij,n})_n$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}b_{ij,n}=a_{ij}$.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque les suites $(b_{ij,n})_n$ convergent vers les réels a_{ij}, on a :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ \exists\,N_{ij}\in\mathbb{N}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ [n\geqslant N_{ij}]\Longrightarrow[|b_{ij,n}-a_{ij}|<\varepsilon]$$

On pose donc : $N_0=\max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}N_{ij}$. Alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ [n\geqslant N_0]\Longrightarrow\left[\forall\,(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ |b_{ij,n}-a_{ij}|<\varepsilon\right]$

Conclusion : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,N_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ [n\geqslant N_0]\Longrightarrow\left[\forall\,(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ |b_{ij,n}-a_{ij}|<\varepsilon\right]$.

†. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, établie en cours.