

DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES — JUIN 2019

Ce devoir est composé de 4 exercices ; il est rédigé sur 4 pages.

Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.

Documents et matériels électroniques interdits. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Veuillez rédiger deux copies séparées

➤ **une copie ALGÈBRE pour les exercices 1 et 2 ;**

➤ **une copie ANALYSE pour les exercices 3 et 4**

Merci !

EXERCICE 1 — On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \longmapsto XP'' + (X - 4)P' - 3P$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Ecrire la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. A l'aide de la question précédente, calculer $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.
4. Déterminer le rang de f . Préciser l'image de f .
5. Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.
6. Etablir que $\mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
7. **Diagonalisation de f .**
 - a. Calculer $f(X - 4)$.
 - b. Etablir qu'il existe un unique polynôme unitaire Q de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.
Etablir de même qu'il existe un unique polynôme unitaire $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
 - c. On considère la famille $B' = \{1, X - 4, Q, R\}$.
Démontrer que la famille B' est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - d. Ecrire la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B' .
 - e. Etablir qu'il existe une matrice $P \in \operatorname{GL}_4(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que : $D = P^{-1}MP$.
(on ne demande pas de calculer P^{-1}).

8. Dans cette question, on note encore $D = M_{B'}(f)$ et $M = M_B(f)$ les matrices introduites précédemment, et I_4 la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on note U le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)$.

a. Calculer : $U(D) = D(D + I_4)(D + 2I_4)(D + 3I_4)$.

b. Si λ désigne un réel quelconque, que vaut $P(D + \lambda I_4)P^{-1}$?

c. En déduire : $U(M) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

d. Soit n un entier naturel non nul. Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

e. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$ est de rang 4.

$$P \longmapsto P(M)$$

EXERCICE 2 — Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(\star) \quad P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$$

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si a est une racine de P , alors $z_1 = (a + 1)^2 - 1$ et $z_2 = (a - 1)^2 - 1$ sont aussi des racines de P .

2. Soit a_0 un nombre complexe. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

a. Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P , alors le nombre complexe a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

c. En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

d. Montrer que -1 n'est pas racine de P .

e. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$.

3. Dédurre des questions précédentes que si a est une racine complexe de P , alors : $|a + 1| = 1$.

Par la suite, on admettra que l'on a aussi : $|a - 1| = 1$.

4. Montrer que si le degré de P est strictement positif, alors P a pour unique racine 0.

5. Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(\star)$.

EXERCICE 3 — Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $T : E \rightarrow E$ par :

$$\forall f \in E, \quad T(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que l'application T définit un endomorphisme de E .

On démontrera que T est effectivement une application de E dans E ; c'est-à-dire, que si $f \in E$, alors la fonction $T(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'endomorphisme T est injectif.

3. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{|x|}$.

a. Étudier la fonction g sur $\mathbb{R}$ (variations, limites et représentation graphique).

b. Déterminer soigneusement $T(g)$.

Lors du calcul de $T(g)(x)$, vous devrez distinguer les cas $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$.

c. Montrer que $g \in \text{Im}(T)$.

4. a. Montrer que $\text{Im}(T) = \{h \in E \mid h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} xh'(x) = 0\}$.

b. Vérifier que l'ensemble $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonction réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(T)$.

c. Justifier que l'ensemble $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonction réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel strict de $\text{Im}(T)$ (*i.e.* justifier que $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq \text{Im}(T)$).

5. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(0) = 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad u(x) = x \sin(\frac{1}{x})$.

a. Montrer que la fonction u est un élément de E .

b. La fonction u appartient-elle à $\text{Im}(T)$?

c. L'endomorphisme T est-il surjectif ?

6. Montrer que si $f \in E$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors $T(f)$ admet également un développement limité à l'ordre n en 0 ; l'exprimer en fonction de celui de f .

7. On suppose dans cette question que f est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(f)(x) \leq f(x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $T(f)(x) \geq f(x)$.

b. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,

$$T(f)'(x) = \frac{f(x) - T(f)(x)}{x}.$$

c. En déduire que $T(f)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 — L'objet de cet exercice est l'étude locale de la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} xy'' + (x-4)y' - 3y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -2. \end{cases}$$

On admet l'existence et l'unicité d'une solution φ de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est-à-dire, on admet l'existence et l'unicité d'une fonction φ deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $\varphi(1) = 2$, $\varphi'(1) = -2$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0.$$

1. Montrer par récurrence que φ est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Qu'en déduire ?
2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \varphi^{(n)}(1)$. En dérivant n fois la relation :

$$x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0,$$

montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$.

3. Écrire une fonction en **Python** prenant en argument un entier positif n qui détermine u_n .
4. Justifier que φ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 1 est de la forme :

$$\varphi(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + ((x-1)^3).$$

Déterminer les valeurs des réels a, b, c, d .

5. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.
6. **a.** Justifier l'existence d'un réel $M_2 \geq 0$ tel que : $\forall x \in [1, 2], |\varphi''(x)| \leq M_2$.
b. Établir que $|\varphi(2)| \leq \frac{M_2}{2}$.