

CB2 — CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE "MP" DE MATHÉMATIQUES — 8/6/19

Problème 1 — Une amélioration de la formule de Stirling

1/ a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} k [\ln(t)]_k^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} k \ln(k+1) - k \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1) \ln(k+1) - k \ln(k)] - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = n \ln(n) - \ln \left(\prod_{k=1}^{n-1} (k+1) \right) = n \ln(n) - \ln(n!) \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt = n \ln(n) - \ln(n!).$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_n = \int_1^n dt - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{t} dt = n - 1 - n \ln(n) + \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{\ln(n)}{2} - 1$

2/ a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_n^{n+1} \frac{t - \lfloor t \rfloor - (1/2)}{t} dt = \int_n^{n+1} \frac{t - n - (1/2)}{t} dt = \int_n^{n+1} dt - \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

D'autre part : $\int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx = \int_{-1}^1 dx - (2n+1) \int_{-1}^1 \frac{1}{2n+1+x} dx$

$$= 2 - (2n+1) [\ln(2n+1+x)]_{-1}^1 = 2 - (2n+1) [\ln(2(n+1)) - \ln(2n)] = 2 - (2n+1) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \quad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx \quad (\heartsuit).$

Enfin, procédons au changement de variable $u = -x$ dans l'intégrale : $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx.$

On a : $J = \int_1^{-1} \frac{-u}{2n+1-u} (-du)$ soit $J = - \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1-x} dx \quad (\diamond).$

D'après $(\heartsuit)$ et $(\diamond)$, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1-x} dx.$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1-x} dx$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit judicieusement : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}(I_{n+1} - I_n) + \frac{1}{2}(I_{n+1} - I_n)$.

D'après la question précédente, et par linéarité de l'intégrale, on a donc :

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} - \frac{x}{2n+1-x} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{-2x^2}{(2n+1)^2 - x^2} dx$$

$$\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} dx$$

c/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} dx$.

Par parité de l'intégrande et symétrie de l'intervalle d'intégration par rapport à 0, on en déduit que :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} dx$$

Pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a : $\frac{x^2}{(2n+1)^2} \leq \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} \leq \frac{x^2}{(2n+1)^2 - 1}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2} dx \leq I_n - I_{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2 - 1} dx$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{3(2n+1)^2} \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2 - 3} \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{3(2n+1)^2 - 3} = \frac{1}{12n^2 + 12n + 3 - 3} = \frac{1}{12n(n+1)} \quad (\clubsuit)$$

$$\text{Par ailleurs : } \frac{1}{3(2n+1)^2} = \frac{1}{12n^2 + 12n + 3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{12(n+1)(n+2)} = \frac{1}{12n^2 + 36n + 24}.$$

Puisqu'il est clair que : $\frac{1}{12n^2 + 12n + 3} \geq \frac{1}{12n^2 + 36n + 24}$, on en déduit que :

$$I_n - I_{n+1} \geq \frac{1}{12(n+1)(n+2)} \quad (\heartsuit)$$

Grâce à $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on peut conclure : $\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{12n(n+1)}$.

d/ Notons pour tout n entier naturel non nul : $u_n = I_n - \frac{1}{12n}$ et $v_n = I_n - \frac{1}{12(n+1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_{n+1} - u_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} =$

$$I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12n(n+1)} = - \left(\underbrace{I_n - I_{n+1} - \frac{1}{12n(n+1)}}_{\leq 0} \right)$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante $(\spadesuit)$.

De manière analogue : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $v_{n+1} - v_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(n+2)}$

$$= I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} = - \left(\underbrace{I_n - I_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)(n+2)}}_{\geq 0} \right)$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite (v_n) est donc décroissante $(\clubsuit)$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ $(\heartsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on peut affirmer que les suites u et v sont adjacentes.

Conclusion. Les suites $\left(I_n - \frac{1}{12n}\right)_n$ et $\left(I_n - \frac{1}{12(n+1)}\right)_n$ sont adjacentes.

En particulier, elles convergent vers une limite commune ; il existe un réel α tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n - \frac{1}{12n}\right) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n - \frac{1}{12(n+1)}\right) = \alpha$$

e/ On a pour tout entier naturel non nul : $I_n = \alpha + \frac{1}{12n} + \underbrace{\left[I_n - \alpha - \frac{1}{12n}\right]}_{=w_n}$.

D'après l'étude réalisée dans la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - \frac{1}{12n} \leq \alpha \leq I_n - \frac{1}{12(n+1)}$

Il s'ensuit que : $|w_n| \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$, soit : $|w_n| \leq \frac{1}{12n(n+1)}$.

En particulier : $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où : $w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \alpha + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

3/ a/ Soit n un entier naturel non nul. D'après les questions 1-b et 2-e, on a :

$$\ln(n!) = \alpha + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + 1$$

$$\Rightarrow n! = e^{\alpha + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} n^n e^{-n} \sqrt{n} e$$

$$\Rightarrow n! = e^{1+\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

D'où, via un développement asymptotique à l'ordre 1 de $e^{\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})}$ en $+\infty$:

$$n! = e^{1+\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \beta \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ avec : $\beta = e^{1+\alpha}$

b/ D'après la formule de Wallis (établie dans le DS7) : $\binom{2n}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$ ($\spadesuit$).

Or : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. D'après la question précédente, on a :

$$\binom{2n}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}{\beta^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{\beta \sqrt{n}} \quad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), on a : $\frac{\sqrt{2}}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. D'où : $\beta = \sqrt{2\pi}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Problème 2 — Classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose : $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha / k \in \mathbb{Z}\}$.

1/ Soit α un réel > 0 . L'ensemble $\alpha\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{R}$ (SG1) par définition, qui contient 0 (SG2) puisque $0 = \alpha \times 0$. Cet ensemble est stable pour l'addition (SG3), puisque (pour faire court) $\alpha k_1 + \alpha k_2 = \alpha(k_1 + k_2)$, et par passage à l'opposé (SG4) puisque $\mathbb{Z}$ l'est.

Conclusion. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

2/ Il est connu que $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.*

Conclusion. $\mathbb{Q}$ est en particulier un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

3/ a/ Puisque $G \neq \{0\}$, G contient un élément non nul x . Si $x > 0$, alors $x \in G^+$; sinon, $(-x) \in G^+$ (puisque G est stable par passage à l'opposé). Dans tous les cas : $G^+ \neq \emptyset$.

G^+ étant une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 par définition, elle admet une borne inférieure. En notant $\alpha = \inf G$, on a nécessairement $\alpha \geq 0$, puisque 0 est un minorant de G^+ , et que $\inf G$ est le plus grand d'entre eux.

Conclusion. La partie G^+ est non vide, et elle admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$.

*. C'est d'ailleurs le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ (petit exo).

b/ Lorsque $G = \mathbb{Z}$, $\alpha = 1$ (trivial).

Considérons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (car $\mathbb{R}$ est archimédien). Ce qui assure qu'il existe des rationnels strictement positifs arbitrairement proches de 0. Par suite : lorsque $G = \mathbb{Q}$, $\alpha = 0$.

Remarque : on aurait pu directement utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour obtenir la conclusion précédente.

c/ Supposons que $\alpha = \inf G^+ > 0$.

Supposons également que $\alpha \notin G^+$. D'après la caractérisation de la borne inférieure :

$$\exists g_1 \in G^+, \quad 0 < \alpha < g_1 < 2\alpha$$

Posons : $\varepsilon = g_1 - \alpha > 0$ (puisque $\alpha \notin G$) :

$$\exists g_2 \in G^+, \quad 0 < \alpha < g_2 < g_1 < 2\alpha$$

Notons : $g = g_1 - g_2$. On peut observer que $g \in G^+$, puisque c'est la différence de deux éléments de G , et que l'on a clairement $g > 0$.

Par ailleurs : $g < \alpha$. On a ainsi montré l'existence d'un élément $g \in G^+$, tel que $g < \inf G^+$: c'est absurde.

On déduit de cette contradiction que : $\alpha \in G^+$, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion. Si $\alpha = \inf G^+ > 0$, alors $\alpha \in G^+$.

d/ Supposons $\alpha > 0$. D'après la question précédente : $\alpha \in G^+$. En particulier : $\alpha \in G$.

Une récurrence immédiate permet d'établir que $\alpha\mathbb{N} \subset G$, et la stabilité de G par passage à l'opposé implique que : $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ (♠).

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in G$.

Il existe un unique entier relatif k tel que : $k\alpha \leq g < (k+1)\alpha$. Encore une fois, puisque G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $h = g - k\alpha \in G$. Si $h \neq 0$, alors h est un élément de G^+ , avec $h < \alpha$ (cf encadrement précédent) : c'est absurde.

On déduit de cette nouvelle contradiction que $h = 0$, et par suite : $g = k\alpha$. Ainsi $g \in k\mathbb{Z}$. Ce qui prouve l'inclusion $\alpha\mathbb{Z} \supset G$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : si $\alpha = \inf G^+ > 0$, alors : $G = \alpha\mathbb{Z}$.

e/ Supposons que $\alpha = \inf G^+ = 0$. Soient x un réel et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que : $|x - g| < \varepsilon$.

Puisque $\alpha = \inf G^+ = 0$, il existe (caractérisation de la borne inférieure) un élément $g_1 \in G^+$ tel que : $0 < g_1 < \varepsilon$.

Il existe encore un unique entier relatif k tel que : $kg_1 \leq x < (k+1)g_1$. En particulier : $|x - kg_1| < \varepsilon$. Puisque $g = kg_1$ appartient à G (G étant un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$), on a établi l'existence d'un élément $g \in G$ tel que : $|x - g| < \varepsilon$.

Conclusion. Si $\alpha = \inf G^+ = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

Applications

4/ Soient a et b deux réels. On note : $G(a, b) = \{pa + qb / (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a/ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $G(a, b)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. (routine)

b/ Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $3q^2 = p^2$. Or la valuation 3-adique de $3q^2$ est impaire, tandis que celle de p^2 est paire : contradiction.

Conclusion. $\sqrt{3}$ est irrationnel ($\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

c/ D'après la question 4-a, $G(1, \sqrt{3})$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Puisqu'il est trivialement non réduit à $\{0\}$, $G(1, \sqrt{3})^+$ admet une borne inférieure d'après la première partie. Continuons de noter : $\alpha = \inf G(1, \sqrt{3})^+$.

Supposons que $\alpha > 0$. Alors $G(1, \sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$ d'après la question 3-d. En particulier il existe deux entiers relatifs p et q non nuls tels que : $p\alpha = 1$ et $q\alpha = \sqrt{3}$. On en déduit que $1/p = \sqrt{3}/q$, d'où $\sqrt{3} = q/p$, d'où $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$: contradiction.

On déduit de cette contradiction que $\alpha = 0$. D'après la question 3-e, ceci implique que $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Conclusion. $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d/ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est 1-périodique, et $\sqrt{3}$ -périodique.

Soient a et b deux entiers relatifs. On a : $f(a + b\sqrt{3}) = f(b\sqrt{3}) = f(0)$ (la première égalité provenant de la 1-périodicité de f , la seconde provenant de sa $\sqrt{3}$ -périodicité).

Conclusion. $\forall y \in G(1, \sqrt{3}), f(y) = f(0)$.

e/ Soit x un réel. Par caractérisation séquentielle de la densité, il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $G(1, \sqrt{3})$ qui converge vers x . Or, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, f(g_n) = f(0)$ ($\spadesuit$).

Par ailleurs, on a par continuité séquentielle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g_n) = f(x)$ ($\clubsuit$).

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que $f(x) = f(0)$. Cette égalité étant valide pour un réel x arbitraire, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et $\sqrt{3}$ -périodique, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

5/ Montrons que les trajectoires d'une boule dans un billard rectangulaire sont périodiques, ou denses.

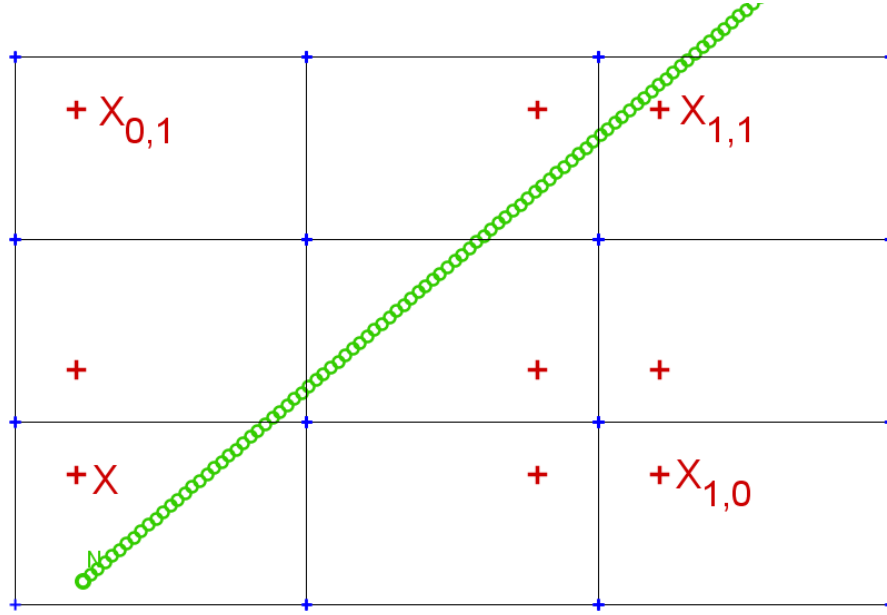
En "dépliant" le billard (voir figure page suivante), on peut voir une trajectoire de bille comme une droite Δ d'équation $y = \alpha x + \beta$.

Notons a et b les côtés du billard. Soit un point du billard $X = (x, y) \in [0, a] \times [0, b]$.

Considérons les points de la forme $X_{p,q} = (x + 2pa, y + 2qb)$. Ces points correspondent tous au point X dans le billard "non-déplié".

Lorsque $\frac{a\alpha}{b}$ est irrationnel, nous allons montrer que la trajectoire est dense. La distance du point $X_{p,q}$ à la droite Δ vaut, comme chacun sait :

$$d(X_{p,q}, \Delta) = \frac{|y + 2qb - \alpha(x + 2pa) - \beta|}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad \text{D'où : } d(X_{p,q}, \Delta) \leq |(y - \alpha x - \beta) + 2qb - 2p\alpha a|$$



Ces considérations posées, il est extrêmement naturel d'introduire l'ensemble :

$$G = G(2b, 2\alpha a) = \{2k_1b + 2k_2\alpha a \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

D'après la question 4-a, G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Puisqu'il est trivialement non réduit à $\{0\}$, G^+ admet une borne inférieure d'après la première partie. Notons : $\mathfrak{x} = \inf G^+$.

Supposons que $\mathfrak{x} > 0$. Alors $G = \mathfrak{x}\mathbb{Z}$ d'après la question 3-d. En particulier il existe deux entiers relatifs p et q non nuls tels que : $p\mathfrak{x} = 2b$ et $q\mathfrak{x} = 2\alpha a$. On en déduit que $2b/p = 2\alpha a/q$, d'où $a\alpha/b = q/p$, d'où $a\alpha/b \in \mathbb{Q}$: ce qui contredit notre hypothèse (suivant laquelle $a\alpha/b$ est irrationnel).

On déduit de cette contradiction que $\mathfrak{x} = 0$. D'après la question 3-e, ceci implique que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit : $G = G(2b, 2\alpha a)$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément g de G tel que : $|(y - \alpha x - \beta) - g| < \varepsilon$.

Ainsi : $\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $|(y - \alpha x - \beta) - 2pb - 2q\alpha a| < \varepsilon$. D'où : $d(X_{p,q}, \Delta) < \varepsilon$.

Le point X étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que tout point du billard peut être approché arbitrairement près par un point de la trajectoire de la bille. Autrement dit, la trajectoire est dense dans le billard.

Conclusion. Soient a et b les longueurs des côtés du billard, et α la "pente" de la trajectoire.

Si $\frac{a\alpha}{b}$ est irrationnel, alors la trajectoire de la bille est dense dans le billard.