Corrigé du DS commun - Algèbre (ex 1 et 2) — Juin 2019

Exercice 1 — On considère l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'' + (X-4)P' - 3P \end{array}$$

1/ Soit P un polynôme de degré $\leqslant 3$. On a :

$$\deg\left(XP'' + (X-4)P' - 3P\right) \leqslant \max\left(\deg(XP''), \deg\left((X-4)P'\right), \deg(-3P)\right)$$

Or : $\deg(XP'') \leqslant 2$, $\deg((X-4)P') \leqslant 3$ et $\deg(-3P) \leqslant 3$.

Par suite : $\deg\left(XP'' + (X-4)P' - 3P\right) \leqslant 3$.

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ce qui assure déjà que f est bien définie.

Considérons à présent deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_3[X]$, et deux réels λ et μ. On a :

$f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)'' + (X-4)(\lambda P + \mu Q)' - 3(\lambda P + \mu Q)$

$$= \lambda XP'' + \mu XQ'' + \lambda(X-4)P' + \mu(X-4)Q' - 3\lambda P - 3\mu Q = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui assure que f est linéaire. $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])}$.

2/ On a : $f(1) = -3$; $f(X) = -2X - 4$; $f(X^2) = -X^2 - 6X$ et $f(X^3) = -6X^2$. On en déduit que la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\boxed{M = M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3/ Notons $X_B \in \mathbb{R}^4$ le quadruplet des coordonnées de $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$ dans la base B. D'après la question précédente :

$$X_B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\boxed{f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}}$

4/ On a : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3}$.

On en déduit que : $\dim(\mathrm{Im}f) = 3$. Puisque $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ sont clairement non coplanaires, la famille $\mathscr{F} = \{f(1), f(X), f(X^2)\}$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$; son cardinal étant égal à la dimension de $\mathrm{Im}f$, la famille $\mathscr{F}$ en est une base. Donc : $\dim(\mathrm{Im}f) = 3$.

Enfin, $\mathscr{F}$ étant composée de 3 polynômes de degré inférieur ou égal à 2, $\mathrm{Im}f$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisqu'en outre $\mathrm{Im}f$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont de même dimension, on peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Im}f = \mathbb{R}_2[X]}$.

5/ D'après la question précédente et le théorème du rang : $\dim(\ker f) = 1$. Or, d'après la question 3, $X^3 - 6X^2 + 18X - 24 \in \ker f$.

Conclusion. Le noyau de f est la droite vectorielle : $\ker f = \mathrm{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

6/ D'après la question 4, $\mathrm{Im}f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est un sev de dimension 3 dans un ev de dimension 4). D'après la question 5, $\ker f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}_3[X]$ engendrée par le polynôme $P_1 = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$. Puisque P_1 est de degré 3, il n'appartient pas à $\mathrm{Im}f$.

On peut donc conclure : $\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Im}f \bigoplus \ker f}$.

7/ **Diagonalisation de** f.

a/ D'après la question 2, on a : $f(X-4) = f(X) - 4f(1) = -2X - 4 - 4(-3) = -2X + 8 = -2(X-4)$.
Conclusion. $f(X-4) = -2(X-4)$.

b/ Soit Q un polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $Q = X^2 + bX + c$. Notons X_B le quadruplet des coordonnées de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$[f(Q) = -Q] \Longleftrightarrow [MX_B = -X_B] \Longleftrightarrow [(M + \mathrm{I}_4)X_B = 0_{\mathbb{R}^4}]$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2c - 4b & = & 0 \\ -b - 6 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -6 \\ c & = & 12 \end{array}\right.$$

Donc le polynôme $Q = X^2 - 6X + 12$ est l'unique polynôme unitaire de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.

Par ailleurs, on a déjà établi que $\ker f = \mathrm{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

Donc le polynôme $R = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$ est l'unique polynôme unitaire tel que : $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

c/ Notons : $B' = \{1, X-4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$. Supposons qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que :

$$a + b(X-4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0$$

Alors : $dX^3 + (c - 6d)\,X^2 + (18d - 6c + b)X + a - 4b + 12c - 24d = 0$. Par identification des coefficients en X^3, on a : $d = 0$.

D'où : $cX^2 + (-6c + b)X + a - 4b + 12c = 0$. Par identification des coefficients en X^2, on a : $c = 0$.

D'où : $bX + a - 4b = 0$. Par identification des coefficients en X, on a : $b = 0$. D'où $a = 0$.

Ainsi : $[a + b(X-4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0] \Longrightarrow [a = b = c = d = 0]$.

Ce qui prouve que B' est libre. Puisque de plus le cardinal de B' est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, on peut affirmer que B' est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion. La famille $\{1, X-4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

d/ On a $f(1) = -3$ (quest. 2) ; $f(X-4) = -2(X-4)$ (quest. 7-a) ;

$f(X^2 - 6X + 12) = -(X^2 - 6X + 12)$ (quest. 7-b) ; $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ (quest. 3).

On en déduit que la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B' est : $\boxed{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

e/ Notons $P = P_{BB'}$ la matrice de passage de la base canonique à la base B'.

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme toute matrice de passage, P est inversible *, et $P^{-1} = P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}$.

D'après la formule du changement de base, on a : $\boxed{M_{B'}(f) = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}}$.

Avec les notations de l'énoncé, on a donc : $\boxed{D = P^{-1}MP}$.

8/ **Sev engendré par les itérés de** f.

a/ D'après la question 7-d, on a : $D = \text{diag}(-3, -2, -1, 0)$. On en déduit que : $D + \text{I}_4 = \text{diag}(-2, -1, 0, 1)$, $D + 2\text{I}_4 = \text{diag}(-1, 0, 1, 2)$ et $D + 3\text{I}_4 = \text{diag}(0, -2, 1, 2)$.

On en déduit que : $D(D + \text{I}_4)(D + 2\text{I}_4)(D + 3\text{I}_4) = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$.

Conclusion. $U(D) = 0_{\text{M}_4(\mathbb{R})}$

b/ D'après la question précédente, on a : $D = P^{-1}MP$. Par ailleurs, pour tout réel λ : $\lambda\text{I}_4 = \lambda P^{-1}\text{I}_4 P$.

On en déduit que, pour tout réel λ on a : $D + \lambda\text{I}_4 = P^{-1}MP + \lambda P^{-1}\text{I}_4 P = P^{-1}(M + \lambda\text{I}_4) P$

Conclusion. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ D + \lambda\text{I}_4 = P^{-1}(M + \lambda\text{I}_4) P$ soit encore : $M + \lambda\text{I}_4 = P(D + \lambda\text{I}_4) P^{-1}$.

c/ Par définition du polynôme U, on a : $U(M) = M(M + \text{I}_4)(M + 2\text{I}_4)(M + 3\text{I}_4)$.

On déduit alors de la question précédente que :

$$U(M) = \underbrace{PDP^{-1}}_{=M} \underbrace{P(D + \text{I}_4) P^{-1}}_{M+\text{I}_4} \underbrace{P(D + 2\text{I}_4) P^{-1}}_{M+2\text{I}_4} \underbrace{P(D + 3\text{I}_4) P^{-1}}_{M+3\text{I}_4}$$

$$= PD(D + \text{I}_4)(D + 2\text{I}_4)(D + 3\text{I}_4) P^{-1} = P \underbrace{U(D)}_{=0_{\text{M}_4(\mathbb{R})}} P^{-1} = 0_{\text{M}_4(\mathbb{R})}$$

Conclusion. $U(M) = 0_{\text{M}_4(\mathbb{R})}$

*. Il est d'ailleurs clair que P est une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ de rang 4, donc inversible.

d/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $X^n = UQ_n + R_n$, avec $\deg(R_n) < \deg(U)$.

Puisque U est un polynôme de degré 4, le polynôme R_n est dans $\mathbb{R}_3[X]$. Il existe par conséquent quatre réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que : $R_n = a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$.

On en déduit que : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$. L'évaluation de cette relation en 0 donne : $d_n = 0^n$, soit $d_n = 0$ (puisque $n \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion. Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

d/ Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente, on a : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$.

Par conséquent : $M^n = U(M)Q_n(M) + a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Or $U(M) = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$ d'après la question 8-c.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Et naturellement : $M^0 = \mathrm{I}_4$. $(\spadesuit)$

Notons à présent $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3)$ le sev de $M_4(\mathbb{R})$ engendré par $B_0 = \{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_kX^k$.

On a : $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\varphi\left(X^k\right) = \sum_{k=0}^{N} a_kM^k$. Puisque les matrices M^k appartiennent à F d'après $(\spadesuit)$, et que F est un sev de $M_4(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire des matrices M^k appartient à F. Par suite : $\varphi(P) \in F$. Ce qui assure que : $\mathrm{Im}\varphi \subset F$.

Réciproquement, il est immédiat que : $\mathrm{I}_4 = \varphi(1)$; $M = \varphi(X)$; $M^2 = \varphi(X^2)$ et $M^3 = \varphi(X^3)$ (les polynômes 1, X, X^2 et X^3 sont en effet dans $\mathbb{R}_N[X]$ puisque $N \geqslant 3$). Les générateurs de F appartiennent à l'image de φ. Puisque $\mathrm{Im}\varphi$ est également un sev, on en déduit que : $F \subset \mathrm{Im}\varphi$.

On a donc établi que : $\mathrm{Im}\varphi = F$, c'est à dire : $\boxed{\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3)}$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $B_0 = \{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$ est libre pour conclure.

A cette fin, on considère la famille $B_1 = \{\mathrm{I}_4, D, D^2, D^3\}$. Montrons que B_1 est libre. Supposons qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $a\mathrm{I}_4 + bD + cD^2 + dD^3 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

Alors : $\begin{pmatrix} a-3b+9c-27d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2b+4c-8d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

D'où : $\left\{\begin{array}{rcl} a-3b+9c-27d & = & 0 \\ a-2b+4c-8d & = & 0 \\ a-b+c-d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3b+9c-27d & = & 0 \\ -2b+4c-8d & = & 0 \\ -b+c-d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ -3b+9c-27d & = & 0 \\ -2b+4c-8d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ 6c-24d & = & 0 \\ 2c-6d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ 6c-24d & = & 0 \\ 6d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que la famille $B_1 = \{\mathrm{I}_4, D, D^2, D^3\}$ est libre.

Par ailleurs, l'application $\rho : C \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto PCP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ (d'automorphisme réciproque $\rho^{-1} : C \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto P^{-1}CP$).

Puisque la famille B_0 est l'image de B_1 par ρ, la famille B_0 est libre (l'image d'une famille libre par une application injective étant libre).

En résumé, on a montré que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\right)$, et que la famille $\{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$ est libre. On en déduit que $\mathrm{Im}\varphi$ est de dimension 4.

Conclusion. $\mathrm{rg}(\varphi) = 4$ et $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\right)$

Exercice 2 — Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(\star) \qquad\qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$$

1/ Soit $a \in \mathbb{C}$. Supposons que a est une racine de P. Alors : $P(a) = 0$ d'où $P\left((a+1)-1\right) = 0$. Puisque P satisfait la relation $(\star)$, on en déduit que : $P\left((a+1)^2-1\right) = 0$.

De manière analogue : $P\left((a-1)+1\right) = 0$. Puisque P satisfait la relation $(\star)$, on en déduit que : $P\left((a-1)^2-1\right) = 0$.

Conclusion. $\forall\, a \in \mathbb{C},\ [P(a) = 0] \Rightarrow \left[P\left((a+1)^2-1\right) = 0 \wedge P\left((a-1)^2-1\right) = 0\right]$

2/ Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

a/ Supposons que a_0 est racine de $\mathbb{C}$. Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "a_n est racine de P".

L'assertion $A(0)$ est vraie, par hypothèse.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Ceci signifie que a_n est racine de P. D'après la question 1, le complexe $(a_n+1)^2-1$ est également racine de P.
Or : $(a_n+1)^2-1 = a_n^2+2a_n = a_{n+1}$. Donc a_{n+1} est racine de P. Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $[a_0 \text{ racine de } P] \Longrightarrow [\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \text{ racine de } P]$.

b/ Supposons $a_0 > 0$. Montrons que la suite (a_n) est à termes strictement positifs.

Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "$a_n > 0$".

L'assertion $A(0)$ est vraie, par hypothèse.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. On a : $a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{>0} + 2\underbrace{a_n}_{>0}$. Donc $a_{n+1} > 0$. Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

Pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n$. D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n > 0$. La suite (a_n) est donc strictement croissante.

Conclusion. Si a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

c/ Supposons que P possède une racine réelle strictement positive ; notons la a_0. D'après la question 2-a, tous les réels a_n sont racines de P ; et d'après la question précédente, les réels a_n sont deux à deux distincts. On en déduit que le polynôme P possède une infinité de racines, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle P est non nul.

Conclusion. P ne possède pas de racine strictement positive.

d/ Supposons que -1 est racine de P. Alors, d'après la question 1, le réel $\alpha = (-1-1)^2 - 1$ est également racine de P. Or $\alpha = 3$; et le polynôme P n'admet aucune racine strictement positive d'après la question précédente : contradiction.

Conclusion. -1 n'est pas racine de P.

e/ Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "$a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$".

L'assertion $A(0)$ est clairement vraie.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2 = \left[(a_0+1)^{2^n}\right]^2 = (a_0+1)^{2^{n+1}}$$

Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3/ Soit a une racine de P. La suite (a_n) construite comme précédemment, en posant $a_0 = a$, est telle que a_n est racine de P pour tout entier naturel n.

Supposons que $|a+1| \neq 1$. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n+1| = |a+1|^{2^n}$.

Soient n et m deux entiers naturels distincts. On a :

$$\left[\ |a+1|^{2^n} = |a+1|^{2^m}\right] \underbrace{\iff}_{|a+1|\in\mathbb{R}_+} [\ |a+1| = 0\ \vee\ |a+1| = 1]$$

Or $|a+1| \neq 1$ par hypothèse, et $|a+1| \neq 0$ puisque la nullité de $|a+1|$ est équivalente à l'assertion $a = -1$, et que (-1) n'est pas racine de P d'après la question 2-d.

On en déduit que les réels $|a_n + 1|$ sont deux à deux distincts, et par suite que les complexes a_n sont deux à deux distincts. On en déduit donc encore une fois que le polynôme P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait qu'il est non nul.

Conclusion. Soit $a \in \mathbb{C}$. Si a est racine de P, alors $|a+1| = 1$.

4/ Soit $a \in \mathbb{C}$. Si a est racine de P, alors $|a+1| = 1$ (cf ci-dessus) et $|a-1| = 1$ (énoncé). Le complexe a est donc l'affixe d'un point situé à une distance égale à 1 du point d'affixe 1 et du point d'affixe -1 ; le point d'affixe 0 est l'unique point satisfaisant ces conditions. D'où $a = 0$.

Dans le cas où P est un polynôme non constant, alors il possède toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Et d'après ce qui précède, il ne peut posséder que 0 comme racine. Par suite, si P est non constant, il existe un complexe α non nul tel que : $P = \alpha X^{\deg(P)}$.

Conclusion. Si $\deg(P) > 0$, alors P ne possède que 0 comme racine.

5/ Il est immédiat que $0_{\mathbb{C}[X]}$ et $1_{\mathbb{C}[X]}$ sont les seuls polynômes constants vérifiant $(\star)$.

Soit P un polynôme non constant satisfaisant $(\star)$. D'après la question précédente : $P = \alpha X^n$ (avec $n = \deg(P)$, et $\alpha \in \mathbb{C}^*$).

Par ailleurs, puisque P vérifie $(\star)$, on a :

$$\left[\alpha\left(X^2-1\right)^n = \alpha(X-1)^n\alpha(X+1)^n\right] \Longleftrightarrow \left[\alpha\left(X^2-1\right)^n = \alpha^2\left(X^2-1\right)^n\right] \Longleftrightarrow \left[\alpha^2 = \alpha\right]$$

$$\Longleftrightarrow [\alpha(\alpha-1) = 0] \underbrace{\Longleftrightarrow}_{(\alpha\neq 0)} [\alpha = 1]$$

En résumé, si P est un polynôme non constant vérifiant $(\star)$, alors $P = X^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, le polynôme X^n vérifie cette condition pour tout entier naturel n (nul ou non).

Conclusion. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$ est :

$$\left\{X^k \,/\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\}$$