

CB2 — EPREUVE “MP” DE MATHÉMATIQUES — 8 JUIN 2019

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte ; l'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Durée : v_3 (90) heures.

Problème 1 — Une amélioration de la formule de Stirling

Problématique. La formule de Stirling affirme que : $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$. L'objectif de ce problème est de raffiner cette formule, et d'établir le :

THÉORÈME (formule de Stirling améliorée).
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$I_n = \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{t} dt.$$

1/ a/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt = n \ln(n) - \ln(n!)$$

b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$I_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{\ln(n)}{2} - 1.$$

2/ a/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1+x} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{2n+1-x} dx$$

b/ Déduire de cette double égalité que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} dx$$

c/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

d/ Etablir que les suites $\left(I_n - \frac{1}{12n}\right)_n$ et $\left(I_n - \frac{1}{12(n+1)}\right)_n$ sont adjacentes. On notera α leur limite commune.

e/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$I_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
 où a et b sont deux réels que l'on précisera.

3/ a/ Déduire de ce qui précède qu'il existe un réel β tel que :
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \beta \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

b/ Montrer que $\beta = \sqrt{2\pi}$, en **admettant** la formule de Wallis :
$$\left(\frac{2n}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

Problème 2 — Classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose : $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha / k \in \mathbb{Z}\}$.

- 1/ Soit α un réel > 0 . Etablir que la partie $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.*
- 2/ Justifier brièvement que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- 3/ On considère G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. L'objectif de cette question est d'établir que :

→ soit $G = \alpha\mathbb{Z}$ pour un réel $\alpha > 0$;

→ soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

A cette fin, on note :

$$G^+ = G \cap \mathbb{R}_+^* = \{x \in G / x > 0\}$$

- a/ On suppose que $G \neq \{0\}$. Montrer que la partie G^+ est non vide, et qu'elle admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$.
- b/ Que vaut cette borne inférieure α lorsque $G = \mathbb{Z}$, et lorsque $G = \mathbb{Q}$? On pourra exceptionnellement donner les réponses sans justification.
- c/ On suppose que $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in G^+$. On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la caractérisation de la borne inférieure.
- d/ En supposant toujours $\alpha > 0$, montrer que : $G = \alpha\mathbb{Z}$.
- e/ Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$. Etablir que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Applications

- 4/ Soient a et b deux réels. On note : $G(a, b) = \{pa + qb / (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.
 - a/ Montrer que $G(a, b)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
 - b/ Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
 - c/ Montrer que $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 - d/ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est 1-périodique, et $\sqrt{3}$ -périodique.
Etablir que : $\forall y \in G(1, \sqrt{3}), \quad f(y) = f(0)$.
 - e/ Montrer que f est constante.

5/ Question bonus...

Montrer que les trajectoires d'une boule dans un billard rectangulaire sont périodiques, ou denses.

*. Pour alléger les notations, on n'a pas noté ici : "établir que $(\alpha\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ ". Il est entendu que la *lci* sera l'addition tout au long de ce problème.