Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}1 — 10 septembre 2022

- *La durée du devoir est de 1 heure, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 4 exercices.*
- *N'oubliez pas de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question.*

Barème indicatif : Ex1 : 3pts — Ex2 : 3pts — Ex3 : 4pts — Ex4 : 5pts

---

Exercice 1 — (Loi de Morgan).

Soient P et Q deux assertions logiques.

A l'aide d'une table de vérité, démontrer que :

$$\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$$

Exercice 2 — (Quantificateurs).

Dans cet exercice, (u_n) désigne une suite réelle quelconque.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses).

a/ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ *(la suite u est croissante)*

b/ $\exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n$ *(la suite u est périodique)*

c/ $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [|u_n - \ell| < \varepsilon]$ *(la suite u est convergente)*

2/ Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[u_n = u_p] \Longrightarrow [n = p]$$

Exercice 3 — (Suite).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 8$, $u_1 = 9$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$$

Exercice 4 — (Porte logique NAND).

Soient P et Q deux assertions logiques. On définit l'assertion logique $P \uparrow Q$ en posant :

$$P \uparrow Q \;\equiv\; \overline{P \wedge Q}$$

1/ Dresser la table de vérité de $P \uparrow Q$.

2/ Soient P, Q et R trois assertions logiques. Etablir que les assertions $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ ne sont pas logiquement équivalentes.

3/ Montrer que $\overline{P}$ peut s'exprimer uniquement en fonction de P et du symbole $\uparrow$.

4/ Exprimer $(P \wedge Q)$ puis $(P \vee Q)$ uniquement en fonction de P, Q et du symbole $\uparrow$.