CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N⁰1 — 11 SEPTEMBRE 2021**EXERCICE 1** — (LOI DE MORGAN).

Soient P et Q deux assertions logiques. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Les assertions $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ prennent simultanément les mêmes valeurs de vérité : elles sont donc logiquement équivalentes.

Conclusion. $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$

EXERCICE 2 — (QUANTIFICATEURS).

Dans cet exercice, (u_n) désigne une suite réelle quelconque.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses).

a/ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (la suite u est croissante)

$$\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

b/ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$ (la suite u est périodique)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, u_{n+k} \neq u_n$$

c/ $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0] \implies [|u_n - \ell| < \varepsilon]$ (la suite u est convergente)

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0] \wedge [|u_n - \ell| \geq \varepsilon]$$

2/ Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[u_n = u_p] \implies [n = p]$$

Réciproque : $[n = p] \implies [u_n = u_p]$

Négation : $[u_n = u_p] \wedge [n \neq p]$

Contraposée : $[n \neq p] \implies [u_n \neq u_p]$

EXERCICE 3 — (SUITE).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 8$, $u_1 = 9$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$ par récurrence **double** sur n .

Notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$.

► Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). D'une part : $u_0 = 8$ (énoncé) et d'autre part $3 \times (-2)^0 + 5 \times 3^0 = 8$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 9$ (énoncé) et d'autre part $3 \times (-2)^1 + 5 \times 3^1 = -6 + 15 = 9$. Donc $P(1)$ est vraie.

► Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n . On a alors :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \quad (\text{selon l'énoncé})$$

$$\iff u_{n+2} = 3 \times (-2)^{n+1} + 5 \times 3^{n+1} + 6(3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n) \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$\iff u_{n+2} = -6 \times (-2)^n + 15 \times 3^n + 18 \times (-2)^n + 30 \times 3^n$$

$$\iff u_{n+2} = 12 \times (-2)^n + 45 \times 3^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3 \times (-2)^2 \times (-2)^n + 5 \times 3^2 \times 3^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3 \times (-2)^{n+2} + 5 \times 3^{n+2}$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$

EXERCICE 4 — (PORTE LOGIQUE NAND).

Soient P et Q deux assertions logiques. On définit l'assertion logique $P \uparrow Q$ en posant :

$$P \uparrow Q \equiv \overline{P \wedge Q}$$

1/ Ci-contre, la table de vérité de $P \uparrow Q$.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \uparrow Q \equiv \overline{P \wedge Q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

2/ Soient P , Q et R trois assertions logiques.

On a d'une part : $P \uparrow (Q \uparrow R) \equiv \overline{P} \vee (\overline{Q \uparrow R})$ d'où : $P \uparrow (Q \uparrow R) \equiv \overline{P} \vee (Q \wedge R)$.

D'autre part : $(P \uparrow Q) \uparrow R \equiv (\overline{P \uparrow Q}) \vee \overline{R}$ d'où : $(P \uparrow Q) \uparrow R \equiv (P \wedge Q) \vee \overline{R}$.

Plaçons-nous dans le cas où P est fausse, et où Q et R sont vraies. Alors : $(P \wedge Q) \vee \overline{R}$ est fausse, tandis que $\overline{P} \vee (Q \wedge R)$ est vraie.

Il s'ensuit que les assertions $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ ne sont pas logiquement équivalentes.

3/ Par définition de l'opérateur NAND, on a : $(P \uparrow P) \equiv (\overline{P \vee P})$. D'où : $(P \uparrow P) \equiv \overline{P}$.

4/ Soient P et Q deux assertions mathématiques. On a :

► d'une part : $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \equiv (\overline{P \uparrow Q}) \vee (\overline{P \uparrow Q}) \equiv (\overline{P \uparrow Q}) \equiv \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}} \equiv \overline{\overline{P}} \wedge \overline{\overline{Q}} \equiv P \wedge Q$;

► et d'autre part : $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \equiv (\overline{P \uparrow P}) \vee (\overline{Q \uparrow Q}) \equiv (\overline{\overline{P} \vee \overline{P}}) \vee (\overline{\overline{Q} \vee \overline{Q}}) \equiv P \vee Q$

Conclusion : $P \vee Q \equiv (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$ et $P \wedge Q \equiv (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$.

5/ Puisque : $[P \implies Q] \equiv \overline{P} \vee Q$, on déduit des questions 3 et 4 que :

$$[P \implies Q] \equiv [(P \uparrow P) \uparrow (P \uparrow P)] \uparrow [Q \uparrow Q]$$