Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}2 — 17 septembre 2022

- *La durée du devoir est de 1 heure, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 5 exercices.*
- *Pensez à encadrer ou souligner les résultats à la fin de chaque question, et à accorder du soin à la présentation et à la rédaction.*

Barème indicatif : Ex1 : 3pts — Ex2 : 3pts — Ex3 : 3pts — Ex4 : 3pts — Ex5 : 3pts

Exercice 1 — (Applications directes du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_3 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(6k+2)$. Montrer que : $S_4 = 2n(n+1)^2$.

Exercice 2 — (Un classique).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Exercice 3 — (Un autre classique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme S définie en posant :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k$$

Calculer S et montrer que $S = an + b$, où a et b sont deux réels à préciser.

Exercice 4 — (Récurrence).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2 \, u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = 2^{2n} \, (n!)^2 \, \pi$$

Exercice 5 — (Astucieux) Soit n un entier naturel arbitraire.

Calculer les sommes suivantes (les deux questions sont complètement **dépendantes**) :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$