Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}2 — 17 septembre 2022

Exercice 1 — (Applications directes du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

La somme S_1 est géométrique de raison 2. D'où : $S_1 = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$. Soit : $\boxed{S_1 = 2^{n+1} - 1}$

On a : $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$. Selon la formule du binôme de Newton, on en déduit que : $S_2 = (2+1)^n$.
Soit : $\boxed{S_2 = 3^n}$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_3 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

On a : $S_3 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - \ln(k)]$.

La somme S_3 est donc télescopique et : $S_3 = \ln(1) - \ln(n)$. Soit : $\boxed{S_3 = -\ln(n) \text{ ou } S_3 = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_4 = \sum_{k=0}^{n} k(6k+2)$. Montrer que : $S_4 = 2n(n+1)^2$.

On a : $S_4 = \sum_{k=0}^{n} k(6k+2) = S_4 = \sum_{k=0}^{n} \left[6k^2 + 2k\right]$.

Par linéarité de la somme, on en déduit que :

$$S_4 = 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k = 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(2n+2)$$

Finalement : $\boxed{S_4 = 2n(n+1)^2}$

Exercice 2 — **(Un classique).** Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que* :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n$ ($\spadesuit$).

D'après la formule du binôme de Newton, on a également : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ ($\heartsuit$).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules ($\spadesuit$) et ($\heartsuit$).

D'une part : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n\,(1+x)^{n-1}$ ($\diamondsuit$) D'autre part : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$ ($\clubsuit$)

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules ($\diamondsuit$) et ($\clubsuit$), on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$

Exercice 3 — **(Un autre classique).**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme S définie en posant :

$$S = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\, k$$

Calculer S et montrer que $S = an + b$, où a et b sont deux réels à préciser.

L'idée est de séparer la somme suivant les termes de rang pair et ceux de rang impair. On a :

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\, k = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{2n}(-1)^k\, k + \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{2n}(-1)^k\, k = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{2n} k - \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{2n} k$$

Les entiers pairs entre 0 et $2n$ sont tous ceux de l'ensemble : $\{2k\,,\ k \in [\![\, 0, n\,]\!]\}$.
Les entiers impairs entre 0 et $2n$ sont tous ceux de l'ensemble : $\{2k+1\,,\ k \in [\![\, 0, n-1\,]\!]\}$.

Par suite : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \underbrace{2\sum_{k=0}^{n} k - 2\sum_{k=0}^{n-1} k}_{=2n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 1}_{=n}.$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\, k = n \text{ (ainsi } a = 1 \text{ et } b = 0)}$.

*. C'est une question de cours pour la semaine prochaine.

Exercice 4 — (Récurrence).
On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2 \, u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = 2^{2n} \left(n!\right)^2 \pi$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $u_{2n+1} = 2^{2n} \left(n!\right)^2 \pi$.

➤ Initialisation ($n = 0$). D'une part : $u_1 = \pi$. D'autre part : $2^0 \left(0!\right)^2 \pi = \pi$. Donc $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$u_{2n+3} = u_{(2n+1)+2}$$

$$\iff u_{2n+3} = (2n+2)^2 \, u_{2n+1} \qquad \text{(selon l'énoncé)}$$

$$\iff u_{2n+3} = (2n+2)^2 \, 2^{2n} \left(n!\right)^2 \pi \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\iff u_{2n+3} = 2^2 (n+1)^2 \, 2^{2n} \left(n!\right)^2 \pi$$

$$\iff u_{2n+3} = 2^{2n+2} \left((n+1)!\right)^2 \pi$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = 2^{2n} \left(n!\right)^2 \pi$

Exercice 5 — (Astucieux) Soit n un entier naturel arbitraire.

Calculer les sommes suivantes (les deux questions sont complètement **dépendantes**) :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

➤ D'une part : $2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.

Cette somme peut "se casser en deux", et s'écrire comme la somme des termes de rang pair et celle des termes de rang impair :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

En d'autres termes : $A + B = 2^{2n}$ $(\spadesuit)$

➤ Par ailleurs, lorsque n est non nul : $0 = 0^{2n} = (1+(-1))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}$.

Cette somme peut "se casser en deux", et s'écrire comme la somme des termes de rang pair et celle des termes de rang impair :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} \binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{2k+1} \binom{2n}{2k+1}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

En d'autres termes : $A - B = 0$ $(\clubsuit)$

➤ D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $\begin{cases} A+B &= 2^{2n} \\ A-B &= 0 \end{cases}$.

La résolution aisée de ce système permet de conclure que : $A = B = 2^{2n-1}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$

➤ Dans le cas[†] où $n = 0$, on a : $A = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{2k} = \binom{0}{0} = 1$ et $B = \sum_{k=0}^{-1} \binom{0}{2k+1} = 0$.

†. Très très particulier.